L3A Mathématiques Université Grenoble Alpes
2019-2020

TD 6

Exercice 1 Soit (E, d) un espace métrique.

1) Soient (a_n) et (b_n) deux suites de Cauchy de E. Montrer que la suite $(d(a_n, b_n))$ est convergente dans $\mathbb{R}$.
2) Soit (a_n) une suite de E telle que $\sum d(a_n, a_{n+1}) < \infty$. Montrer que (a_n) est de Cauchy.

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme définie par $|| \sum a_k X^k || = \max(|a_k|,\ k \in \mathbb{N})$. On note $P_n = 1 + X + \cdots + \dfrac{X^n}{n}$. Montrer que la suite (P_n) est de Cauchy, mais ne converge pas.

Exercice 3 Soit δ la distance sur $\overline{\mathbb{R}}$ définie par $\delta(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ où $\arctan(+\infty) = \pi/2$ et $\arctan(-\infty) = -\pi/2$. Montrer que $(\mathbb{R}, \delta)$ n'est pas complet mais que $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$ l'est.

Exercice 4 Soit E l'espace vectoriel des fonctions C^1 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1) E est-il complet pour la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$?
2) pour la norme $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$?

Exercice 5 À l'aide du théorème de Baire, montrer qu'un fermé dénombrable non vide X de $\mathbb{R}$ a au moins un point isolé. *Indication :* on pourra considérer $\omega_x = X \setminus \{x\}$.

Exercice 6 (Une application du théorème de Baire : le théorème de la limite simple) Soit f une limite **simple** d'applications continues $f_n : (E, d) \to (F, \delta)$, où (E, d) est un espace métrique **complet**.

1. Pour des entiers p, q, n, on note $E_{p,q,n} = \{x \in E \mid \delta(f_p(x), f_q(x)) \leq 1/n\}$, et $E_{p,n} = \bigcap_{q \geq p} E_{p,q,n}$. Montrer $E = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_{p,n}$.
2. Pour tout n, on pose $O_n = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{E}_{p,n}$. Montrer que O_n est un ouvert dense dans E.
3. On pose $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$. Montrer que f est continue en x, pour tout x dans G.
4. En déduire que f est continue sur une partie dense de E.
5. Application : soit f une fontion réelle dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors f' est continue sur une partie dense de $\mathbb{R}$. (Considérer $f_n(x) = n(f(x + 1/n) - f(x))$).

Exercice 7 Trouver

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 \, dx.$$

Exercice 8 (Théorème de Picard) Soit (E, d) un espace métrique complet, $f : E \to E$ ayant une itérée f^p contractante. Montrer que

1. f possède un point fixe et un seul a.
2. Pour tout $x_0 \in E$, la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.

Exercice 9 Soit $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ continue non identique à 1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. On va montrer qu'il existe une unique $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ solution de l'équation fonctionnelle

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\varphi(x)).$$

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $|| \ \ ||_\infty$ et $T : E \to E$ définie par $T(f) = g$, où

$$g(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(t)) \, dt.$$

Montrer que T^2 est contractante. Utiliser l'exercice 8 et conclure.

Exercice 10 Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\ \|_\infty$. On définit pour toute f de E, $T(f)$ par

$$\forall t \in [0,1],\ T(f)(t) = \int_0^t \left(\int_0^x uf(u)du\right) dx.$$

Montrer que T est bien définie, puis qu'elle est contractante. En déduire que l'équation différentielle $f''(t) - tf(t) = 0$ admet une unique solution f telle que $f'(0) = f(0) = 0$, la fonction nulle.

Exercice 11 (Continuité uniforme)

1. Déterminer parmi les fonctions suivantes celles qui sont uniformément continues sur leur intervalle de définition :
   i) exp. ii) ln. iii) $\sqrt{\cdot}$. iv) $x \mapsto \frac{1}{x}$. v) $x \mapsto x^2$. vi) $x \mapsto \sin(x^2)$. vii) $x \mapsto x\sin(\ln(x))$.
2. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$, est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. (indication : utiliser le théorème de Heine).
3. Soit δ la distance sur $\mathbb{R}$ définie par $\delta(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$. Montrer à l'aide du théorème de prolongement des applications uniformément continues que l'identité $(\mathbb{R},\delta) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 12 (Complété d'un espace métrique) Soit (E,d) un espace métrique.

1. On dit que deux suites de Cauchy (a_n) et (b_n) sont équivalentes si
   $$\lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n) = 0$$
   Montrer que c'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites de Cauchy de (E,d).
2. On note E^* l'ensemble des classes d'équivalence. On pose, si $A \in E^*$ est représenté par (a_n) et $B \in E^*$ par (b_n), (cf Ex 1)
   $$\Delta(A,B) = \lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n).$$
   Montrer que Δ définit une distance sur E^*.
3. Montrer que (E^*,Δ) est complet. *Indication :* utiliser un procédé diagonal.
4. Pour $a \in E$, on note A_a l'élément de E^* représenté par $(a_n) = (a)$. Montrer que $\varphi(a) = A_a$ définit une isométrie de (E,d) dans (E^*,Δ).
5. Montrer que $\varphi(E)$ est dense dans E^*. On identifie E à $\varphi(E)$ et on appelle E^* le *complété* de E.