L3A Mathématiques
2019-2020

Université Grenoble Alpes

TD 5

Exercice 1 Soit (E, d) un espace métrique et A une partie compacte de E.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x, A)$ est atteinte.
2. Soit B un fermé tel que $A \cap B = \emptyset$, montrer que $d(A, B) > 0$ où $d(A, B) = \inf_{(a,b)\in A\times B} d(a, b)$. Donner un contre-exemple lorsque A est seulement supposé fermé.
   Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$ (on pourra considérer $\{x \in E | d(x, A) < \varepsilon\}$). Ceci reste-t-il vrai pour A fermé quelconque ?
3. Soit B un compact, montrer qu'il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $d(A, B) = d(a, b)$.

Exercice 2 Soit A une partie fermée et non bornée de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance usuelle. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, $(x \in A)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\{x|x \in A$ et $f(x) \leq k\}$ est compact.
2. Montrer que $f_{|A}$ est minorée et qu'il existe $a \in A$ tel que $\inf f(A) = f(a)$.
3. Utiliser ce résultat pour montrer que les questions 1) et 3) de l'exercice 1 restent vraies si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^n$ telles que A soit fermée et B compacte.

Exercice 3 Les espaces suivants sont-ils compacts ? On prendra la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$, et la topologie induite sur les parties de $\mathbb{R}^n$ (en particulier idem pour les parties de $M_n(\mathbb{R})$, via l'identification standard $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$). Pour les espaces de fonctions, on prendra la topologie de la convergence uniforme.

1. le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
2. la sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$.
3. l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ \frac{1}{x+1} \geq y \geq 0\}$.
4. l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ \frac{1}{x+1} \geq y > 0\}$.
5. l'ensemble $\{(x, \sin(1/x)); x \in]0, 1]\} \cup \{(0, x);\ x \in [-1, 1]\}$.
6. $GL_n(\mathbb{R})$.
7. le groupe $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de taille n.
8. l'ensemble des matrices symétriques de taille n dont les valeurs propres sont dans $[-1, 1]$.
9. à $k \in]0, 1[$ fixé, l'ensemble des applications k-lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $[-1, 1]$.
10. l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $[-1, 1]$.

Exercice 4 Soit E un espace topologique séparé, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de E. On note l sa limite. Montrer que $\{u_n \in E \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est une partie compacte de E.

Exercice 5 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit A et B deux parties de E.

1. Montrer que si A est compact et B est fermé alors $A + B$ est fermé.
2. Est-ce toujours vrai si on suppose seulement A et B fermés ?

Exercice 6 Soit $l^1(\mathbb{R}) = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sum_{n\geq 0} |u_n| < \infty\}$, muni de la norme $||u|| = \sum_{n\geq 0} |u_n|$.

1) Soit
$$A = \prod_{n\geq 0} [0, 2^{-n}].$$
Montrer que A est une partie compacte de $l^1(\mathbb{R})$.

2) Soit $B = \{(u_n) \in l^1(\mathbb{N}); ||u|| = 1\}$. Montrer que B n'est pas compact. On pourra considérer la suite de $l^1(\mathbb{N}), (e_n)$ où $e_n(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Exercice 7 Soit X et Y des espaces métriques, $f : X \to Y$ une application et $G \subset X \times Y$ le graphe de f, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$.

1. Montrer que G est fermé dans $X \times Y$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) de X convergente telle que $(f(x_n))$ soit convergente dans Y, on a $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.
2. Montrer que si f est continue G est fermé dans $X \times Y$.
3. Montrer que si Y est compact et G est fermé dans $X \times Y$, alors f est continue.

Exercice 8 (Ensemble triadique de Cantor) Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\frac{2x+A}{3}$ l'image de A par l'homothétie de centre x et de rapport $\frac{1}{3}$. L'ensemble triadique de Cantor $K \subset [0, 1]$ est défini par récurrence de la façon suivante :

$$K_0 = [0, 1], \quad K_{n+1} = \frac{K_n}{3} \cup \frac{2 + K_n}{3} \quad \text{et} K = \cap_{n\geq 0} K_n.$$

Ainsi, on découpe $[0, 1]$ en trois intervalles égaux et on retire celui du milieu en gardant les bornes. Donc $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. On réitère le procédé précédent sur chaque segment, chaque segment est coupé en 3 parties égales et la partie centrale est retirée en gardant les bornes.

$$K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

1. Soit $n \geq 1$, montrer que K_n est la réunion de 2^n segments disjoints de la forme $[x_n, x_n + \frac{1}{3^n}]$ où les x_n décrivent l'ensemble $\{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}; a_i \in \{0, 2\}\}$.
2. Montrer que K est compact non vide, d'intérieur vide.
3. Montrer que tout élément x de K s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$ avec les a_i égaux à 0 où 2. Réciproquement, montrer que si $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$ avec les a_i égaux à 0 où 2, alors $x \in K$.
4. Montrer que K est sans point isolé, c'est à dire que pour tout $x \in K$, pour tout $\varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap K \setminus \{x\} \neq \emptyset$. (On dit que K est parfait).
5. Montrer que les composantes connexes de K sont les singletons (on dit que K est complètement discontinu).
6. Montrer que K n'est pas dénombrable.
7. L'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie suivante : Si $x = (x_n)_{n\geq 0}$ est un élément de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, une base de voisinages ouverts de x est donnée par $V_k(x) = \{y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ / pour tout $i \leq k,\ y_i = x_i\}$ où k parcourt $\mathbb{N}$. Montrer que cet espace topologique est homéomorphe à K.

Exercice 9 (Théorème de d'Alembert-Gauss) Soit $P(z)$ un polynôme non constant (à coefficients réels ou complexes). Montrer que P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. *Indication :* montrer que $|P|$ atteint son minimum en un point z_0, puis que $P(z_0) = 0$.

Exercice 10 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont-ils connexes ? Quelles sont leurs composantes connexes ?

Exercice 11 1) Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$ et $M_0=(x_0,y_0)\in D$. Démontrer que $D\setminus\{M_0\}$ est connexe.

2) En déduire que D n'est homéomorphe à aucun segment $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

Exercice 12 1) Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, muni de l'une des distances usuelles. Montrer que :

a) $\mathbb{R}^n\setminus H$ a deux composantes connexes C_1 et C_2, qui sont convexes.

b) Si $a\in H$, alors $C_1\cup\{a\}\cup C_2$ est connexe par arcs.

c) Si A est un sous-ensemble strict de H, alors $\mathbb{R}^n\setminus A$ est connexe.

2) On note $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2=1\}$, $n\geq 2$.

a) Montrer que S^{n-1} est connexe par arcs.

b) Montrer que $\mathbb{R}^n\setminus S^{n-1}$ a deux composantes connexes.

c) Si $*\in S^{n-1}$, $S^{n-1}\setminus\{*\}$ est-elle connexe ?

Exercice 13 On considère le sous-ensemble $X=\Big\{(x,y)\mid y=0\Big\}\cup\Big\{(x,y)\mid x>0, y=\frac{1}{x}\Big\}$ de $\mathbb{R}^2$. X est-il connexe par arcs ? connexe ?

Exercice 14 Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit, les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$D_n=\Big\{(\frac{1}{n},y)\mid y\in\mathbb{R}\Big\},\ E_n=[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]\times\{n\} \text{ et } F_n=\cup_{k\leq n}(D_k\cup E_k).$$

1) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$, F_n est connexe.

2) On note $C=\cup_{n\in\mathbb{N}^*}F_n$ et $A=C\cup D$ où D est l'axe des ordonnées.

a) Montrer que A est connexe (on pourra établir que $C\subset A\subset\overline{C}$).

b) Démontrer que A n'est pas connexe par arcs. (On pourra supposer l'existence de $f:[0,1]\to A$ continue telle que $f(0)=(0,0)$ et $f(1)=(1,1)$, et considérer $p_1\circ f$ et $p_2\circ f$ où $p_1:(x,y)\mapsto x$ et $p_2:(x,y)\mapsto y$)).

Exercice 15 On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^2$:

$$X=\Big[\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}(\{x\}\times\mathbb{R}^+)\Big]\cup\Big[\bigcup_{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\{x\}\times]-\infty,0[)\Big]$$

X est-il connexe par arcs ? connexe ?

Exercice 16 Soit $T=(\{0\}\times[-1,1])\cup([-1,1]\times\{0\})$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que T est connexe

2) Soit $f:T\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(T)$ est un segment.

3) Soit $x\in T$. Montrer que $T\setminus\{x\}$ est connexe si et seulement si x est l'un des quatre points $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$. Montrer que $T\setminus\{(0,0)\}$ a quatre composantes connexes et que, dans les autres cas, $T\setminus\{x\}$ a deux composantes connexes.

4) Montrer que T n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 17 Soit (E,d) un espace métrique connexe non borné. Montrer que toute sphère (i.e. tout ensemble de la forme $\{x\in E\mid d(x_0,x)=r\}$ où $x_0\in E$ et $r>0$) est non vide.

Exercice 18 (Passage des douanes) Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset E$ une partie connexe. Soit $B \subset E$ une partie de E telle que A intersecte B et son complémentaire. Montrer que A intersecte la frontière de B.

Exercice 19 Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et A, B deux parties connexes de E telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$.

1) Démontrer que tout ouvert O de E contenant B rencontre A.

2) Montrer que $A \cup B$ est connexe en utilisant la définition de la connexité (on supposera l'existence de deux ouverts O_1 et O_2 tels que les ensembles $O_1' = (A \cup B) \cap O_1$ et $O_2' = (A \cup B) \cap O_2$ forment une partition de $A \cup B$).

3) Obtenir ce même résultat en considérant les $f : A \cup B \to \{0, 1\}$ continues.

4) Montrer que la conclusion est fausse si on suppose seulement que $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

Exercice 20 Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $F \subset E$ un fermé. On suppose que E et ∂F sont connexes. Montrer que F est connexe. Cela reste-t-il vrai si on ne suppose pas F fermé ?

Exercice 21 Soient (X, τ_X) et (Y, τ_Y) deux espaces topologiques connexes, et $A \subset X$, $B \subset Y$ deux sous-ensembles stricts. Montrer que $(A \times B)^c$ est connexe dans $X \times Y$. Qu'en est-il de $A^c \times B^c$?

Exercice 22 1) Soit A une partie d'un espace topologique (E, τ). On suppose que pour tout x, y dans A, il existe une partie connexe $A_{x,y}$ de A contenant x et y. Montrer que A est connexe.

2) Soient A et B dans $GL(n, \mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une partie connexe H de $GL(n, \mathbb{C})$ qui contient A et B. (Indication : Construire H à l'aide de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \det(\gamma(z)) \neq 0\}$, où $\gamma : z \mapsto zA + (1 - z)B$ pour $z \in \mathbb{C}$).

3) En déduire que $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe.

4) $GL(n, \mathbb{R})$ est-il connexe ?

Exercice 23 Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et A une partie ouverte et fermée de E. Montrer que A est réunion de composantes connexes de E.

Exercice 24 Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $\mathcal{P}$ une partition de E en parties ouvertes et connexes. Montrer que $\mathcal{P}$ est la partition de E en composantes connexes.

Exercice 25 Montrer qu'une application localement constante définie sur un espace connexe est constante.

Exercice 26 Soit U une partie ouverte connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. On suppose que toutes les dérivées partielles de f sont nulles. Montrer que pour tout $x \in U$, il existe un voisinage de x sur lequel f est constante. En déduire que f est constante.

Exercice 27 Soit $f : S^n \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.