

TD 2

Exercice 1 Soit E un espace topologique, et A, B des parties de E. Comparer les paires d'ensembles suivants. Lorsqu'il n'y a pas égalité, donner un contre-exemple.

1. $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.
3. $\overset{\circ}{A \cup B}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B}$.
4. $\overset{\circ}{A \cap B}$ et $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.
5. $\partial(A \cup B)$ et $\partial A \cup \partial B$.
6. $\partial(A \cap B)$ et $\partial A \cup \partial B$.

Exercice 2 Soit E un espace topologique. Soit A une partie de E. Exprimer plus simplement les parties

$$\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \quad \text{et} \quad \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}\,.$$

Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les parties A, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ soient toutes différentes.

Exercice 3 Soit A une partie d'un espace topologique. On note $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

1. Montrer que si A est ouvert, alors ∂A est d'intérieur vide ; ce résultat reste-il vrai avec A fermé ? Avec A quelconque ?
2. Montrer que : A ouvert $\iff A \cap \partial(A) = \emptyset$.
3. Montrer que : A fermé $\iff \partial A \subset A$.
4. Montrer que : A ouvert et fermé $\iff \partial A = \emptyset$.
5. Montrer que $\partial(\overline{A}) \subset \partial A$ et $\partial(\mathring{A}) \subset \partial A$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}$ où ces trois ensembles sont distincts.

Exercice 4 Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des parties suivantes de $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle.

$$A =]-\infty, 1[\cup]1, 2] \cup \{3\} \qquad B = \mathbb{Z} \qquad C = \mathbb{Q}$$
$$D = \left\{(-1)^k + 2^k : k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad E = \{p^{-1} + q^{-1} : (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$$

Même question dans $\mathbb{R}^2$ avec $A =]-\infty, -1] \times \{0\} \cup [-1, 1[\times[-1, 1[$.

Exercice 5 On munit $\mathbb{R}^2$ de sa topologie usuelle. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$A = \{(x, y) \mid x > 0, y \geq 0, xy < 1\} \cup \{(0, 0)\}.$$

1. Est-ce une partie ouverte, fermée dans $\mathbb{R}^2$? Déterminer $\mathring{A}$, $\overline{A}$, ∂A.
2. On munit A de la distance induite. Indiquer si les parties suivantes sont ouvertes fermées dans A et dans $\mathbb{R}^2$:

$$B =]0, +\infty[\times\{0\} \qquad C = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, xy < 1\}$$
$$D = \{(x, y) \mid x > 0, y \geq 0, xy < 1/2\}$$

Exercice 6 Soit X un espace topologique, Y une sous-espace de X muni de la topologie induite et A une partie de Y.

1) On note $\overline{A}$ l'adhérence de A dans X et $\overline{A}^Y$ l'adhérence de A dans Y. Montrer que $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$.

2) On note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A dans X et $\overset{\circ}{A}^Y$ l'intérieur de A dans Y. Montrer que $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{A}^Y$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Exercice 7 (droite numérique achevée) On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et $[a, +\infty) = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$, $(-\infty, b] = (-\infty, b) \cup \{-\infty\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = \{(a,b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty] \,|\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, b) \,|\, b \in \mathbb{R}\}$ est une base pour une topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$.
2. Avec la convention $\arctan(+\infty) = \pi/2$ et $\arctan(-\infty) = -\pi/2$, montrer que $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ définit une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$ et que l'application arctan est une isométrie bijective de $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$ muni de la distance usuelle.
3. Montrer que la topologie induite par la distance d coïncide avec la topologie engendrée par la base $\mathcal{B}$.
4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $x_n \to \ell$ au sens habituel si et seulement si $x_n \to \ell$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, d)$.
5. Montrer que toute suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une sous-suite convergente dans $(\overline{\mathbb{R}}, d)$.

Exercice 8 (Distances sur l'espace des polynômes) Si P et Q sont des polynômes à coefficients réels, on définit

$$d_0(P,Q) = \sup_{x\in[0,1/2]} |P(x) - Q(x)|,$$
$$d_1(P,Q) = \int_0^1 |P(x) - Q(x)| \mathrm{d}x,$$
$$d_2(P,Q) = \begin{cases} \deg(P-Q) + 1 & \text{si } P \neq Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que ce sont des distances sur l'espace $\mathbb{R}[X]$.
2. Quel est le comportement de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour chacune de ces distances ?

Exercice 9 Soit E un ensemble fini. Lorsque A et B sont deux parties de E, on note $A\Delta B$ leur différence symétrique, définie par $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, et on pose $d(A,B) = \mathrm{card}(A\Delta B)$. Montrer que d est une distance sur l'ensemble des parties de E.

Exercice 10 Soit (E, d) un espace métrique. Soit φ une application de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, telle que :

(a) $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(b) φ est croissante,
(c) $\forall u, v \geq 0,\ \varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$ (on dit que φ est sous-additive).

1. Vérifier que l'application $\varphi(d) := \varphi \circ d$ est une distance sur E.
2. Montrer que toute fonction concave non nulle $\varphi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $\varphi(0) = 0$ vérifie les conditions (a), (b) et (c). En déduire que $d/(1+d)$, $\min(1, d)$, $\ln(1+d)$, et d^α pour $0 < \alpha < 1$ sont des distances sur E.

3. On suppose que φ est continue en 0. Lorsque d est une distance sur E, on note pour $x \in E$ et $r > 0$, $B_d(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r.
   — Montrer que pour tout $x \in E$ et $r > 0$, $B_{\varphi(d)}(x, \varphi(r)) \subset B_d(x, r)$.
   — Montrer que pour tout $x \in E$ et $r > 0$, il existe $r' > 0$ tel que $B_d(x, r') \subset B_{\varphi(d)}(x, r)$.
   — En déduire que les distances d et $\varphi(d)$ définissent les mêmes ouverts.
4. Lorsque φ n'est pas continue en 0, montrer que les boules pour la distance $\varphi(d)$ sont des singletons dès que le rayon est suffisamment petit.

Exercice 11 (Espace de suites) Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout f et g dans E, on note

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min(|g(k) - f(k)|, 1)$$

1. Montrer que cette formule définit une distance sur E, et que pour cette distance, E est borné.
2. Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que :
   — si pour tout $k \in [0, K]$, $|g(k) - f(k)| \leq 2^{-K}$, alors $d(f, g) \leq 3 \times 2^{-K}$,
   — si $d(f, g) \leq 2^{-2K}$, alors pour tout $k \in [0, K]$, $|g(k) - f(k)| \leq 2^{-K}$.
3. Montrer que $d(f, f_n) \to 0$ si et seulement si (f_n) converge ponctuellement vers f.
4. Montrer que dans (E, d), toute suite de Cauchy converge. On dit que l'espace métrique (E, d) est complet.
5. Soit T l'application de E dans E définie par $T(f)(n) = f(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T est lipschitzienne pour la distance d.

Exercice 12 (Plus courte distance entre deux parties d'un espace métrique) Soit (E, d) un espace métrique.

1. La formule $\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b)\ ;\ (a, b) \in A \times B\}$ définit-elle une distance sur l'ensemble des parties non vides de E ?
2. Montrer que pour toutes parties A, B, C de E,

$$\mathrm{dist}(A, C) \leq \mathrm{dist}(A, B) + \mathrm{diam}(B) + \mathrm{dist}(B, C).$$

3. Trouver un exemple de F fermée, telle que $d(x, F)$ n'est pas atteinte.

Exercice 13 (Distance SNCF) On munit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. Pour tout x et y dans $\mathbb{R}^2$, on définit $D(x, y) = \|x - y\|$ si x et y sont colinéaires et $D(x, y) = \|x\| + \|y\|$ sinon.

1. Montrer que $D(x, y) \geq \|x - y\|$ pour tout x et y dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que D est une distance.
2. Décrire géométriquement la boule $B_D(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : D(x, y) < r\}$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^\star$ quelconques fixés.

Exercice 14 (Distance ultramétrique) Soit E un ensemble et $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

(i) $\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) = d(y, x)$

(ii) $\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$

1. Montrer que d est une distance et que si $d(x, z) \neq d(z, y)$, (iii) est une égalité : dans E tous les triangles sont isocèles.

2. Montrer que si $r > 0$ et $x \in E$, pour tout $y \in B(x,r)$, $B(y,r) = B(x,r)$.
3. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de E est de Cauchy si et seulement si la suite $(d(x_n, x_{n+1}))_{n\geq 0}$ tend vers 0.
4. Soit p un nombre premier. Pour tout entier non nul, on définit $\nu_p(n)$ comme étant l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. Si $x, y \in \mathbb{Z}$, on pose

$$d_p(x,y) = \begin{cases} p^{-\nu_p(x-y)} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

a) Montrer que d_p est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Z}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}$, déterminer les éléments de la boule fermée $\overline{B}(x, p^{-n})$ et de la boule ouverte $B(x, p^{-n})$.

c) Montrer que la suite de terme général $u_n = 6^n$ converge vers 0 dans $(\mathbb{Z}, d_2)$ mais diverge dans $(\mathbb{Z}, d_5)$.

Exercice 15 On considère l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

1. Soit $C = [0,1] \times [0,1]$. L'ensemble $\mathbb{Q}^2 \cap C$ est-il dense dans C ?
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre fixé et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda x\}$. L'ensemble $\mathbb{Q}^2 \cap D$ est-il dense dans D ?
3. Déterminer les valeurs d'adhérences des suites suivantes (α est un réel fixé) :

a) $u_n = (n, (-1)^n)$	b) $u_n = ((-1)^n, (-1)^{n+1})$
c) $u_n = (1/n, \cos(n\alpha))$	d) $u_n = (\cos(n\alpha), \sin(n\alpha))$

Exercice 16 (Espace métrique produit) Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et (E, d) l'espace métrique produit.

1. Soit $(z_n) = (x_n, y_n)$ une suite de E. Soient A_z, A_x, A_y l'ensemble des valeurs d'adhérence de (z_n), (x_n), (y_n). Démontrer une inclusion relative aux ensembles A_z, A_x, A_y et montrer qu'il n'y a pas toujours égalité.
2. Soient $A_1 \subset E_1$ et $A_2 \subset E_2$, non vides. À quelle condition $A_1 \times A_2$ est-elle ouverte dans (E, d) ? À quelle condition $A_1 \times A_2$ est-elle fermée dans (E, d) ? À quelle condition $A_1 \times A_2$ est-elle dense dans (E, d) ?
3. On note p_1 et p_2 les projections canoniques de $E_1 \times E_2$ sur E_1 et E_2. L'image par p_1 d'une partie ouverte dans (E, d) est-elle ouverte dans (E_1, d_1) ? Mêmes questions avec une partie fermée de (E, d) et avec une partie dense de (E, d).