L3A Mathématiques Université Grenoble Alpes
2019-2020

TD 0 : Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 1 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois propriétés suivantes.

(i) $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$

(ii) $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$

(iii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq M \implies \exists \ell \in \mathbb{R},\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Décrire ces propriétés par une phrase en français la plus simple possible.

Exercice 2 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Démontrer les résultats suivants :

1. Si $A \subset B$, alors $\inf A \geq \inf B$ et $\sup A \leq \sup B$.
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
3. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(a,b) \in A \times B$, $a \leq b$, alors $\sup A \leq \inf B$.
4. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, en notant $A + B = \{a + b\ ;\ (a,b) \in A \times B\}$.

Exercice 3 Soient f et g deux applications d'un ensemble E non vide dans $\mathbb{R}$. On note

$$\sup_E f = \sup_{x \in E} f(x) = \sup\{f(x), x \in E\}.$$

1. Montrer que $\sup\limits_E (f+g) \leq \sup\limits_E f + \sup\limits_E g$.
2. Si g est minorée, montrer que $\sup\limits_E (f+g) \geq \sup\limits_E f + \inf\limits_E g$.
3. Montrer que si pour tout $x \in E$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\sup\limits_E f \leq \sup\limits_E g$

Exercice 4 Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de $A \times B$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(x,y) \in A \times B} f(x,y) = \sup_{x \in A} \big(\sup_{y \in B} f(x,y)\big) = \sup_{y \in B} \big(\sup_{x \in A} f(x,y)\big),$$

$$\sup_{x \in A} \big(\inf_{y \in B} f(x,y)\big) \leq \inf_{y \in B} \big(\sup_{x \in A} f(x,y)\big)$$

et que l'inégalité peut être stricte.

Exercice 5 Soit F une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ non constante.

On note $m = \inf\limits_{\mathbb{R}} F$, $M = \sup\limits_{\mathbb{R}} F$ et on définit sur $]m, M[$ l'application $F^{\leftarrow}$ par :

$$F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \mid F(x) \geq y\}$$

1. Montrer que $\{x \mid F(x) \geq y\} =]F^{\leftarrow}(y), +\infty[$ ou $[F^{\leftarrow}(y), +\infty[$.
   On suppose maintenant que F est continue à droite.
2. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]m, M[$, $F(x) \geq y \iff x \geq F^{\leftarrow}(y)$
3. Montrer que $F^{\leftarrow}$ est croissante et continue à gauche.
4. A quelle condition sur F, $F^{\leftarrow}$ est-elle continue ?
5. Que représente $F^{\leftarrow}$ si F est continue et strictement croissante ?

Exercice 6 (Exemples)

1. Déterminer le sup et l'inf de $x^{1/x}$ pour x parcourant $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, et $\mathbb{N}^*$.
2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup_{\mathbb{Q}} f = \sup_{\mathbb{R}} f$.
3. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{\mathbb{R}} f' = \sup_{x \neq y} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Exercice 7 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels vérifiants $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a) < f(b)$. Pour $y \in]f(a), f(b)[$ on pose,

$$g(y) = \inf\{x \in [a, b] : f(x) \geq y\}$$

Montrer que $g(y) \in]a, b[$ et que $f(g(y)) = y$.

Exercice 8 (Un théorème de point fixe)

Soit $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction croissante (pas forcément continue).
On considère $\Omega = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que Ω est non vide et qu'il admet une borne supérieure $\omega \in [0, 1]$.
2. Montrer que $f(\omega) \geq \omega$.
3. Montrer que $f(\omega) \leq \omega$. [1]
4. en conclure que f admet un point fixe (i.e. il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$).

Exercice 9

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ majorée sur un intervalle ouvert non vide I. En utilisant la borne supérieure M de l'ensemble $f(I)$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in I$ et $\eta > 0$ tels que
$$|h| < \eta \;\Rightarrow\; f(a + h) - f(a) < \varepsilon.$$
Que peut-on dire si f est minorée sur un intervalle ouvert non vide ?
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété d'additivité
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$
Montrer que s'il existe un intervalle ouvert sur lequel f est bornée alors f est continue sur $\mathbb{R}$. De quelle forme est alors f ?
3. Si on ne suppose rien sur f, l'affirmation de la première question 1 est-elle vraie ?

Remarque : Avec l'axiome du choix on peut construire des fonctions additives discontinues.

Exercice 10 (Développement décimal)

1. Calculer le développement décimal de $13/7$.
2. Calculer $0,454545\cdots + 0,565656\cdots$.

---

1. Indice : on pourra comparer $f(f(\omega))$ et $f(\omega)$.

Exercice 11 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite d'intervalles de $\mathbb{R}$. On s'intéresse aux propriétés suivantes.

(i) $\forall n \neq m,\ A_n \cap A_m = \emptyset$.

(ii) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n = \mathbb{R}$

1. Trouver une suite d'intervalles $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant (i) et (ii) telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $A_n \neq \emptyset$.
2. Est-il possible de trouver une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant (i) et (ii) telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, A_n est un intervalle ouvert $]a_n, b_n[$ non vide.
3. Est-il possible de trouver une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant (i) et (ii) telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, A_n est un intervalle fermé $[a_n, a_n + 1]$ non vide et de longueur 1. Quid pour des intervalles $[a_n, b_n]$?

Exercice 12 (Sous groupes de $\mathbb{R}$) Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On note $P = G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $\omega = \inf P$.

1. Montrer que P est non vide. Qu'en déduit-on pour ω ?
2. On suppose que $\omega > 0$. Montrer que $G = \omega\mathbb{Z} = \{n\omega,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
3. On suppose $\omega = 0$. Montrer que pour tout $a < b$, il existe $g \in G$ tel que $a < g < b$. (On dit que G est dense dans $\mathbb{R}$).
4. Retrouver ainsi le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$. Déterminer $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.
6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}_+^*$. Montrer les résultats suivants.
   (a) $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|n + m\alpha| < \varepsilon$. En déduire que $\mathbb{N} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (c) Pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, il existe $n, n' \in \mathbb{N}$ tel que $a < \cos n < b$. et $a < \sin n' < b$.

Exercice 13 Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Montrer l'équivalence entre

1. $(x_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.
2. $(x_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de sous-suite bornée.
3. $|x_n| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 14 Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels à valeurs dans un segment $[a, b]$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On note A l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(f(x_n))_{n\geq 0}$ est $f(A)$.

Exercice 15 Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $y_n = x_{2n}$ et $z_n = x_{2n+1}$. On note respectivement A, B, C l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$. Trouver une relation entre A, B et C. En déduire une expression de $\limsup x_n$ en fonction de $\limsup y_n$ et $\limsup z_n$.

Exercice 16 Donner un exemple de suite réelle :

1) sans valeur d'adhérence (dans $\mathbb{R}$).
2) dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est F, où F est une partie finie non vide de $\mathbb{R}$ fixée.
3) dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\mathbb{N}$.
4) avec une seule valeur d'adhérence, mais divergente.
5) dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $[0, 1]$.

Exercice 17 Soit $(r_n)_{n\geq 0}$ une suite de rationnels énumérant $\mathbb{Q}$ (autrement dit, l'application $n \mapsto r_n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$). Quelles sont les valeurs d'adhérence de $(r_n)_{n\geq 0}$?

Exercice 18 Montrer que si deux suites réelles bornées (u_n) et (v_n) sont telles que $(u_n - v_n)$ converge vers 0, elles ont les mêmes valeurs d'adhérence.

Exercice 19 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

1) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si pour toute sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(y_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

2) En déduire que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors :

— $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a au plus une valeur d'adhé rence.

— si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhé rence, elle converge.

Exercice 20 Soit (u_n) une suite réelle et $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Déterminer lesquelles des assertions suivantes sont toujours vraies.

1) $u_n \in A$ à partir d'un certain rang.

2) Si A est non vide, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3) Tout segment ne rencontrant pas A ne contient qu'un nombre fini des u_n.

4) Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il n'existe qu'un nombre fini de n tels que $u_n \geq \sup A + \varepsilon$.

5) Si A est borné, alors (u_n) est bornée.

6) Si $A = \emptyset$ et $u_n \geq 0$ pour tout n, alors (u_n) tend vers $+\infty$.

7) Si (v_n) est une suite extraite de (u_n), alors $\liminf v_n = \liminf u_n$.

8) Si (v_n) est une suite extraite de (u_n), alors toute valeur d'adhérence de (v_n) est dans A.

9) Si (v_n) est une suite extraite de (u_n) et si A est un singleton $\{\ell\}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de (v_n).

10) Une suite bornée ayant une seule valeur d'adhérence converge.

Exercice 21 Soit (u_n) une suite réelle. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble
$N_\lambda = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \lambda\}$ est-il fini ?

Exercice 22 Soient (u_n) une suite réelle et $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que, si pour tout k, λ_k est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors il en est de même de λ.

Exercice 23 * Soit (v_n) une suite réelle telle que $v_{n+1} - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (v_n) est un intervalle.

Exercice 24 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs telle que $u_{n+m} \leq u_n u_m$ pour tous m et n dans $\mathbb{N}$.

1) Soit $m \geq 1$ fixé. Montrer que $\limsup u_n^{1/n} \leq u_m^{1/m}$. Indication : utiliser la division euclidienne de n par m.

2) Montrer que la suite $(u_n^{1/n})$ converge vers $\inf_{m\geq 1} u_m^{1/m}$.

3) Application : Si A est une matrice carrée à coefficients réels, et $\|\cdot\|$ une norme matricielle, montrez que $\|A^n\|^{1/n}$ converge vers $\inf_{m\geq 1} \|A^m\|^{1/m}$.

Exercice 25 * Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (u_n) une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite u possède une unique valeur d'adhérence ℓ. Le but de l'exercice est de montrer que (u_n) converge vers ℓ.

1) Montrez que $f(\ell) = \ell$.

2) Montrer qu'il existe $\delta \in]0, 1]$ tel que $f(]\ell - \delta, \ell + \delta[) \subset]\ell - 1, \ell + 1[$.

3) Montrer qu'il existe un rang N_1 à partir duquel $u_n \notin [\ell - 1, \ell - \delta] \cup [\ell + \delta, \ell + 1]$.

4) Montrer qu'il existe $N_2 \geq N_1$ tel que $u_{N_2} \in]\ell - \delta, \ell + \delta[$.

5) Montrer que pour tout $n \geq N_2$, $u_n \in]\ell - \delta, \ell + \delta[$, et conclure.