Exercice 1

- On cherche les courbes caractéristiques:

$$\gamma(s) = (t(s), x(s))$$

avec $t'(s) = 1$

$x'(s) = -u \longleftarrow$ constante car on est sur une courbe caractéristique.

Du coup on peut choisir

$$t(s) = s$$
$$x(s) = -\underbrace{u(0, x(0))}_{-x(0)+1} s + x(0) = (1 - x(0)) s + x(0)$$

Maintenant, si $p = (t, x)$ est donné, p est sur la courbe caractéristique

$$\gamma(s) = (s, (1 - x_0) s + x_0)$$

si et seulement si $\begin{cases} t = s \\ (1 - x_0) s + x_0 = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = s \\ x_0 = \dfrac{x - t}{1 - t} \end{cases} \quad (t \neq 1)$$

Du coup

$$u(t, x) = u\left(0, \frac{x - t}{1 - t}\right) = -\left(\frac{x - t}{1 - t}\right) + 1 = \frac{-x + t + 1 - t}{1 - t} = \frac{1 - x}{1 - t}.$$

- On cherche les courbes caractéristiques:

$\gamma(s) = (t(s), x(s))$ avec $\begin{cases} t'(s) = 1 \\ x'(s) = 1 - u \longleftarrow \text{constante!} \end{cases}$

On peut supposer

$$t(s) = s$$
$$x(s) = (1 - u(0, x(0))) s + x(0)$$
$$= (1 - 2x(0)) s + x(0).$$

si (t,x) est donné, on trouve

$$(t,x) = \gamma(s) = (s, (1-2x_0)s + x_0)$$

$$\iff \begin{cases} t = s \\ x = (1-2x_0)s + x_0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = s \\ x_0 = \dfrac{x-t}{1-2t} \end{cases}$$

Alors

$$u(t,x) = u(0,x_0) = \frac{2(x-t)}{1-2t}.$$

<u>Exercice 2</u> $\quad x_1 \partial_{x_1} u + x_2 \partial_{x_2} u = u$.

1) si $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

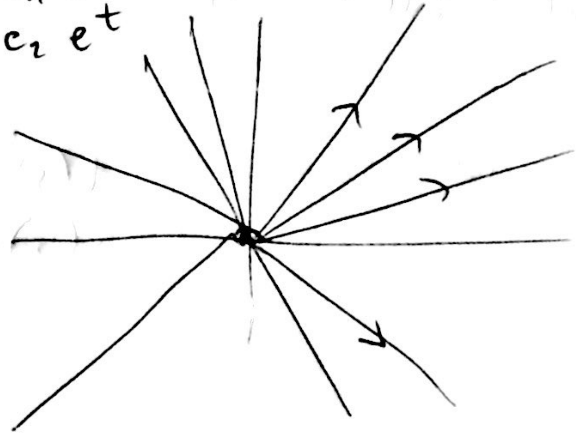
$$\partial_{x_1} u = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad \partial_{x_2} u = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

du coup $\quad x_1 \partial_{x_1} u + x_2 \partial_{x_2} u = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$

$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = u \qquad \text{q.e.d.}$$

2) Pour trouver les courbes caractéristiques, il faut résoudre: $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) \end{cases}$

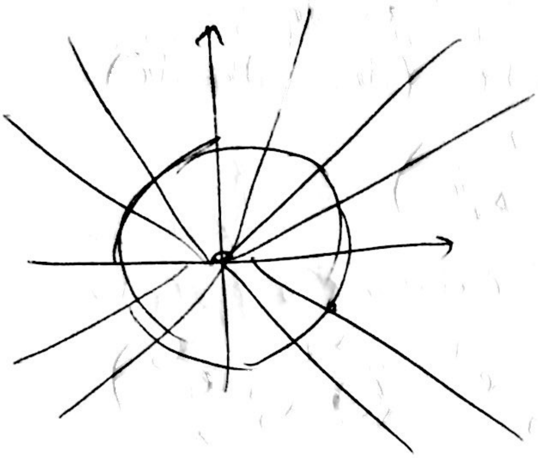
qui a solution $\quad \begin{array}{l} x_1(t) = c_1 e^t \\ x_2(t) = c_2 e^t \end{array}$



Ça représente des demi-droites qui convergent vers l'origine, (pour $t \to -\infty$)
en fait on a $c_2 x_1(t) - c_1 x_2(t) = 0$

et $\lim\limits_{t \to -\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$

3)



c'est maintenant évident que tout courbe $\gamma(t) = (c_1 e^t, c_2 e^t)$ intersect le cercle unitaire dans un unique point.

Formalement, $\gamma(t) \in \mathbb{S}^1 \iff x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = 1$

$$\iff c_1^2 e^{2t} + c_2^2 e^{2t} = 1$$

$$\iff e^{2t} = \frac{1}{c_1^2 + c_2^2} \iff t = -\frac{1}{2} \log(c_1^2 + c_2^2)$$

et la solution est unique.

4) Maintenant on sait que (les constantes c_1, c_2 sont fixées)

$u'(\gamma(t)) = u(\gamma(t))$

$\Rightarrow u \circ \gamma(t) = C e^t$

Pour déterminer C_1 on sait que pour

$t_0 = -\frac{1}{2} \log(c_1^2 + c_2^2)$,

on a $\gamma(t_0) = \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\right) \in \mathbb{S}^1$

du coup $u \circ \gamma(t_0) = u\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\right) =$

$$= g\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\right)$$

$$\Rightarrow C e^{t_0} = \frac{C}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = g\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\right)$$

Alors la solution est :

$$u \circ g(t) = \sqrt{c_1^2+c_2^2}\; g\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}, \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right) e^t.$$

Maintenant, si (x_1, x_2) est donné, évidemment (x_1, x_2) est sur la même courbe (demi-droite) caractéristique de $\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)$.

En fait,

$$(x_1, x_2) = (x_1 e^0, x_2 e^0) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} e^{t_0}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} e^{t_0}\right).$$

$$t_0 = \log\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

En utilisant la formule ci-dessus, par exemple pour $c_1 = x_1$, $c_2 = x_2$, $t = 0$,

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\; g\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right).$$

<u>Rmq</u> : le choix de (c_1, c_2, t) n'est pas unique.

En choisissant

$$c_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \quad c_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \quad t = \log\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

on trouvera le même résultat.

5) On sait que

$$x_1 = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$
$$x_2 = r\sin\theta \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

cours n° 2

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Alors $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = u$

$$\Leftrightarrow r\cos\theta\left(\cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$
$$+ r\sin\theta\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = u$$

$$\Leftrightarrow r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{\partial u}{\partial r} = u \Leftrightarrow r\frac{\partial u}{\partial r} = u$$

6) En coordonnées polaires, la solution du point 4) est : $u(r,\theta) = r\,g(\cos\theta, \sin\theta)$

car $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$

$$\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{r\sin\theta}{r} = \sin\theta$$

Pour vérifier qu'elle est solution, on as

$r\frac{\partial u}{\partial r} = r\,g(\cos\theta, \sin\theta) = u$ q.e.d.

Exercice 3 $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

1) si u_1 et u_2 sont solutions, alors $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ est solutions

$$\frac{\partial^2(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)}{\partial t^2} = \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 t} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 t} =$$

$$= \lambda_1 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda_2 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)}{\partial x^2}.$$

2) • $u_1(x,t) = A_1 \cos(kx - wt)$

$\frac{\partial u_1}{\partial t} = + w A_1 \sin(kx - wt) \qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = - w^2 A_1 \cos(kx - wt)$

$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -k A_1 \sin(kx - wt) \qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -k^2 A_1 \cos(kx - wt)$

Du coup $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \iff w^2 = a^2 k^2 \iff w = \pm ka$

• $u_2(x,t) = A_2 \sin(kx - wt)$

$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = - w^2 A_2 \sin(kx - wt) \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = - k^2 A_2 \sin(kx - wt)$

Du coup $\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \iff w^2 = a^2 k^2 \iff w = \pm ka$

3) $u_1(x,0) = A_1 \cos(kx)$

$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = w A_1 \sin(kx)$

$u_2(x,0) = A_2 \sin(kx)$

$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = - w A_2 \cos(kx)$