Exercice Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calculons les dérivées suivant un vecteur $v = (u,w) \in \mathbb{R}^2$ dans $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tu, tw)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{t^2 uw}{t\sqrt{u^2+w^2}} = \frac{uw}{\sqrt{u^2+w^2}}$$

Du coup, f est Gâteaux-différentiable dans $(0,0)$, mais pas Fréchet-différentiable, car l'application

$$v = (u,w) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{uw}{\sqrt{u^2+w^2}}$$

n'est pas linéaire.

La fonction f est continue dans $(0,0)$:

on a

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$$

si $d((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, pour $\delta = \varepsilon$.

<u>Exercice</u> Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calculons la dérivée suivant un vecteur $v = (u,w)$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tu,tw)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 u v}{t^6 u^6 + t^2 w^2} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{uv}{t^4 u^6 + w^2} = \frac{uv}{u^6 + w^2}$$

Du coup, f est Gâteaux-différentiable, mais pas Fréchet-différentiable.

En fait, f n'est pas même continue dans $(0,0)$:

si on considère la courbe $\gamma(t) = (t, t^3)$, on a

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 (t^3)}{t^6 + (t^3)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^5}{2t^6} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2t} = +\infty$$

et donc $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma(t)) \neq f(\gamma(0)) = f(0,0) = 0$.

Exercice Calculer le gradient des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

- $f(x,y) = x + 3y^2$

  $\nabla f(x,y) = (1, 6y)$

- $f(x,y) = \dfrac{4y}{x^2+1}$

  $\nabla f(x,y) = \left(-\dfrac{8xy}{(x^2+1)^2}, \dfrac{4}{x^2+1}\right)$

- $f(x,y) = e^x \sin y$

  $\nabla f(x,y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)$

Exercice Calculer le gradient des fonctions $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

- $g(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$

  $\nabla g(x_1, \dots, x_n) = (2x_1, \dots, 2x_n)$

- $g(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

  $\nabla g(x_1, \dots, x_n) = \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}, \dots, \dfrac{x_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}\right)$

- $g(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}$

  $\nabla g(x_1, \dots, x_n) = \left(-\dfrac{x_1}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}}, \dots, -\dfrac{x_n}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}}\right)$