On va maintenant considérer le problème de la corde avec extrémités fixées :

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & \text{sur } [0,\pi] \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \forall t \end{cases}$$

où $f(0) = f(\pi) = 0$, $g(0) = g(\pi) = 0$.

Idée : connaître une fonction $u \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ telle que $u(0) = u(\pi) = 0$ est équivalent à connaître $\tilde{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que : $\tilde{u}(-x) = -\tilde{u}(x)$
$\tilde{u}(x+2\pi) = \tilde{u}(x)$

i.e. u impair et 2π-periodique.

En fait, si $u(0) = 0$, on peut etendre u sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ par $\tilde{u}(-x) = -u(x)$, et si $u(\pi) = 0$, on peut après etendre sur $\mathbb{R}$ par 2π-periodicité.

Si u est solution de $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, alors $\tilde{u}$ est encore solution !

$$\tilde{u}_t(-x,t) = u_t(+x,t)$$
$$\tilde{u}_{tt}(-x,t) = u_{tt}(+x,t)$$
$$\tilde{u}_x(-x,t) = -u_x(x,t)$$
$$\tilde{u}_{xx}(-x,t) = u_{xx}(x,t)$$

Supposons $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ soient donnés, avec $f(0) = f(\pi) = g(0) = g(\pi) = 0$.

Soient $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les extensions impaires et 2π-périodiques.

Par la théorie des séries de Fourier,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \qquad \tilde{g}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{inx}$$

Comme $\tilde{f}, \tilde{g}$ sont fonctionnes réelles,

$$\overline{(\tilde{f})} = \tilde{f} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{c}_n e^{-inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

$$\Rightarrow \bar{c}_n = c_{-n}$$

analoguement, $\bar{d}_n = d_{-n}$.

Du coup,

$$\tilde{f}(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n + c_{-n}) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} i(c_n - c_{-n}) \sin(nx)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$a_n, b_n \in \mathbb{R}$

$\tilde{f}$ impair $\Leftrightarrow$ $c_0 = 0$, $a_n = 0$ $\forall n$

$$\Leftrightarrow \tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx).$$

Analoguement, $\tilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin(nx)$

Mais la solution du $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ avec

$$\begin{cases} u(x,0) = \tilde{f}(x) \\ u_t(x,0) = \tilde{g}(x) \end{cases}$$

est la somme des solutions u_1, u_2 avec

$$\begin{cases} u_1(x,0) = \tilde{f}(x) \\ (u_1)_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2(x,0) = 0 \\ (u_2)_t(x,0) = \tilde{g}(x) \end{cases}$$

en fait,
$$(u_1+u_2)(x,0) = \tilde{f}(x)$$
$$(u_1+u_2)_t(x,0) = \tilde{g}(x)$$

et u_1+u_2 est solution par linéarité!

Pour la même raison, il suffit de trouver les solutions avec
$$\begin{cases} u_n(x,0) = \sin(nx) \\ (u_n)_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_n(x,0) = 0 \\ (v_n)_t(x,0) = \sin(nx) \end{cases}$$

que on connaît déjà!

$$u_n(x) = \cos(nat)\sin(nx)$$
$$v_n(x) = \frac{1}{an}\sin(nat)\sin(nx)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(b_n\cos(nat)\sin(nx) + \frac{\beta_n}{an}\sin(nat)\sin(nx)\right).$$