On va maintenant utiliser la méthode des caractéristiques pour résoudre l'équation d'onde sur $\mathbb{R}$:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

avec conditions initiales $u(x,0) = f(x)$
$u_t(x,0) = g(x)$

(i.e. on connaît la position de la corde et la vitesse de la corde au temps $t=0$).

Observons que, si u est lisse,

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

Appelons $v(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)u = \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x}$

Alors $\frac{\partial v}{\partial t} + a\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ est un EDP linéaire homogène du premier ordre !

On connaît déjà la solution

$$v(x,t) = v(x-at,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x-at,0) - a\frac{\partial u}{\partial x}(x-at,0)$$

$$= g(x-at) - a f'(x-at)$$

En rappelant la définition de v, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} = g(x-at) - a f'(x-at).$$

<u>Rappel</u> : La solution de l'équation

$$u_t + b u_x = v \,, \qquad a \in \mathbb{R}, \quad v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

est $$u(x,t) = u(x-bt,0) + \int_0^t v(bs + x - bt, s)\,ds$$

Du coup on obtient ici $(b = -a)$

$$u(t,x) = u(x+at,0) + \int_0^t v(x - as + at, s)\,ds$$

$$= u(x+at,0) + \int_0^t v(x+at-2as, 0)\,ds$$

$$v(x,t) = v(x-at,0)$$

en changeant variables, $r = x+at-2as$, $dr = -2a\,ds$

$$u(t,x) = u(x+at,0) - \frac{1}{2a}\int_{x+at}^{x-at} v(r,0)\,dr$$

$$= u(x+at,0) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v(r,0)\,dr$$

$$= u(x+at,0) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(r)\,dr - \frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at} f'(r)\,dr$$

$$= f(x+at) - \frac{1}{2}\big(f(x+at) - f(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(r)\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\big(f(x+at) + f(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds .$$

<u>Formule de D'Alembert</u>

Exemple On cherche la solution de l'équation

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \sin(kx) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Pour la formule de D'Alembert,

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\sin(k(x+at)) + \sin(k(x-at))\right)$$

$$= \frac{1}{2}\big(\sin(kx)\cos(kat) + \cos(kx)\sin(kat)$$
$$+ \sin(kx)\cos(kat) - \cos(kx)\sin(kat)\big)$$

$$= \cos(kat)\sin(kx)$$

Exemple On cherche la solution de l'équation

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \sin(kx) \end{cases}$$

Par la formule,

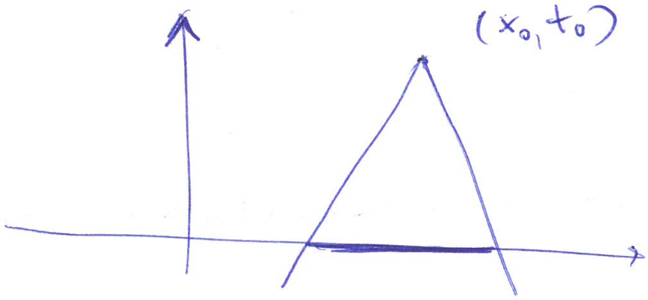
$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \sin(ks)\,ds = \frac{1}{2ak}\left[-\cos(ks)\right]_{x-at}^{x+at}$$

$$= \frac{1}{2ak}\left(-\cos(kx+kat) + \cos(kx-kat)\right)$$

$$= \frac{1}{2ak}\big(-\cos(kx)\cos(kat) + \sin(kx)\sin(kat)$$
$$+ \cos(kx)\cos(kat) + \sin(kx)\sin(kat)\big)$$

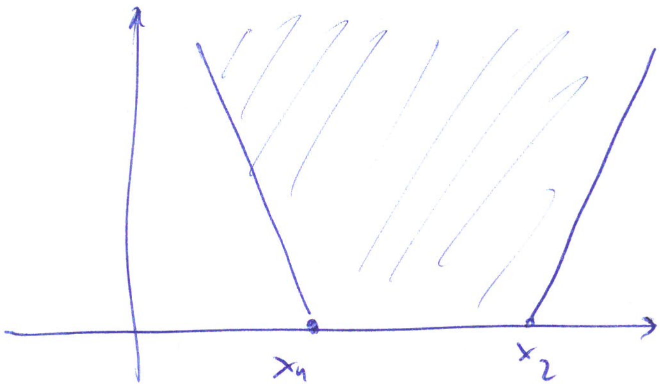
$$= \frac{1}{ak}\sin(kat)\sin(kx)$$

Rmq La solution u dans un point (x_0, t_0) ne dépend que de la condition initiale $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ dans l'intervalle $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$



"domain de dépendance"

Vice versa, les conditions initiales dans un intervalle $[x_1, x_2]$ influencent la solution dans la région



$$x - at \leq x_2$$
$$x + at \geq x_1$$
$$t \geq 0$$

"domain d'influence"

Exemple $g(x)=0$, $f(x)$ fonction triangulaire :