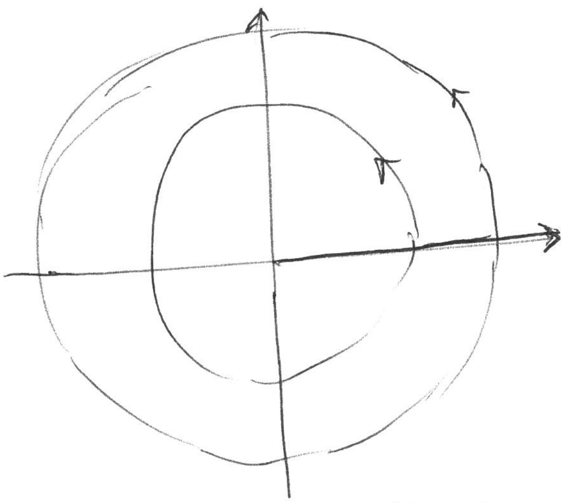
Exemple $\quad x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} = u$

Comme d'habitude, on cherche

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

telle que $\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1(t) = a\cos(t) \\ x_2(t) = a\sin(t) \end{cases}$$



Du coup, si on connaît la solution u sur

$$\{(x,0) \mid x>0\}$$

on peut dériver la solution sur tout point :

si $p_0 = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, p_0 est sur la courbe

$\gamma_a(t) = (a\cos t, a\sin t)$

pour $a = \sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2}$, $t = \arctan \frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}$.

En plus, $(u\circ\gamma)'(t) = x_1(t) \frac{\partial u}{\partial x_2}(\gamma(t)) - x_2(t) \frac{\partial u}{\partial x_1}(\gamma(t)) = u(\gamma(t))$

$$= (u\circ\gamma)(t)$$

Ça montre que, si on pose

$$(u\circ\gamma)(t) =: v(t),$$

$$v'(t) = v(t) \implies \frac{v'(t)}{v(t)} = 1 \implies v(t) = Ce^t$$
$$C = v(0)$$

Du coup, la solution du problème

$$\begin{cases} x_1 u_{x_2} - x_2 u_{x_1} = u \\ u(x_1, 0) = g(x_1) \quad x_1 > 0 \end{cases}$$

sur le demi-plan $\{x_2 \geq 0\}$

est $$u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = u(\gamma_a(t)) = e^t u(\gamma_a(0))$$
$$= e^t u(a, 0) = e^t g(a)$$
$$= g\left(\sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2}\right) e^{\arctan \frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}}$$

car $a = \sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2}$, $t = \arctan \frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}$

$$\implies u(x_1, x_2) = g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) e^{\arctan \frac{x_2}{x_1}}.$$

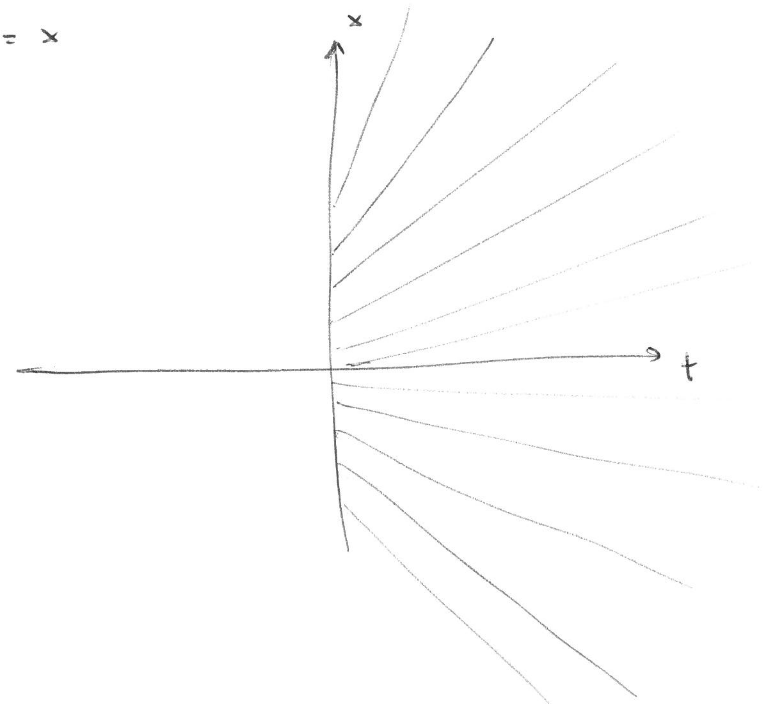
Exemple $\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$

On cherche $\gamma(s) = (t(s), x(s))$ telle que

$$\begin{cases} t'(s) = 1 \\ x'(s) = u(t(s), x(s)) \end{cases}$$

Mais on sait déjà que u est constante le long de la courbe γ !

e.g. si $g(x) = x$



Les courbes caractéristiques sont

$$\gamma(t) = (t, x + g(x) t)$$

Dans l'exemple, si $g(x) = x$,

$$\gamma_x(t) = (t, x + xt) = (t, (1+t)x)$$

pour un point $p = (t, x)$,

$$(t, x) = \gamma_{\hat{x}}(\hat{t}) = (\hat{t}, (1+t)\hat{x}) \Rightarrow \begin{cases} t = \hat{t} \\ x = (1+t)\hat{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \hat{t} \\ \hat{x} = \dfrac{x}{1+t} \end{cases}$$

Alors $u(x,t) = u(\gamma_{\hat{x}}(\hat{t})) = u(\gamma_{\hat{x}}(0)) = u(0, \hat{x}) = g(\hat{x}) = \hat{x} = \dfrac{x}{1+t}$

$u(x,t) = \dfrac{x}{1+t}$ est la solution de $\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(0,x) = x \end{cases}$.

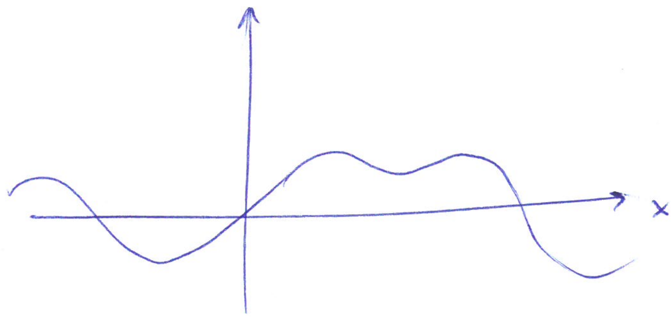
Équation d'onde

On étudiera l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

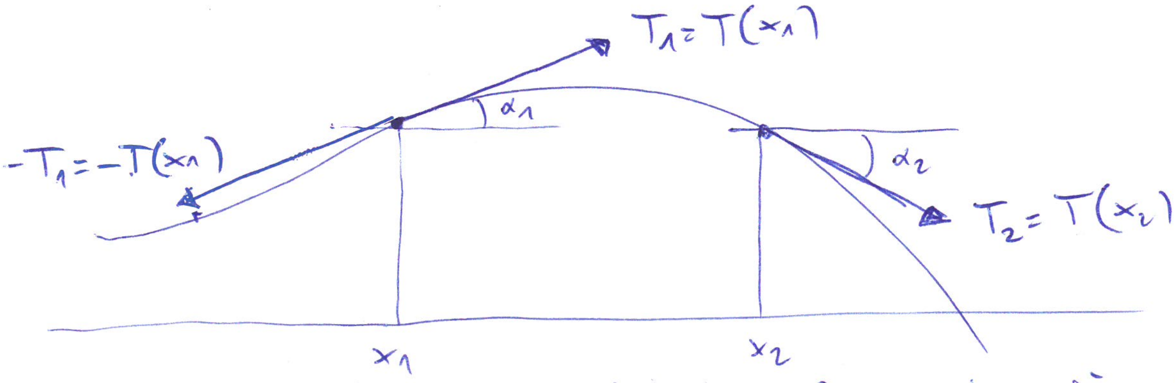
$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

qui représente, par exemple, l'équation d'une corde vibrante. On va voir la dérivation de l'équation :



Soit $u(x,t)$ le déplacement d'une corde (infinie) de la position d'équilibre, qui dépend de la position x et du temps t.

On suppose que l'unique force qui agit sur la corde est la tension $T = T(x)$ (on suppose que la corde est légère et élastique).



$T(x_0)$ = force exercée par la pièce $\{x > x_0\}$ sur la pièce $\{x < x_0\}$

$-T(x_0)$ = force exercée par la pièce $\{x < x_0\}$ sur la pièce $\{x > x_0\}$

De plus, on suppose que :

- Chaque point sur la corde se déplace seulement en vertical
- Le déplacement de la corde est petit
- La densité de masse de la corde est constante.

Les composantes horizontales de la tension sont :

$$T_{hor}(x_1) = T_1 \cos \alpha_1$$
$$T_{hor}(x_2) = T_2 \cos \alpha_2$$

Par contre, les composantes verticales sont

$$T_{ver}(x_1) = T_1 \sin \alpha_1$$
$$T_{ver}(x_2) = T_2 \sin \alpha_2$$

On a :

$$\cos \alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \qquad \sin \alpha(x) = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}$$

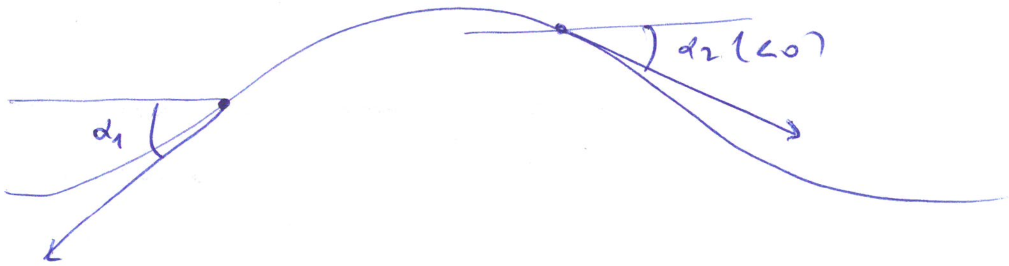
Car le déplacement est petit par rapport à la longueur de la corde, $\alpha \approx 0$, et du coup (au premier ordre)

$$\cos \alpha(x) \approx 1 \qquad \sin \alpha(x) \approx u_x(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x)$$

Comme on suppose que le déplacement est seulement vertical, les composantes horizontales doivent se compenser : $T(x_2) = -T(x_1) \Rightarrow T_1 \cos \alpha_1 = -T_2 \cos \alpha_2$

$\Rightarrow T_1 = -T_2$ i.e. la tension est constante.

Calculons alors la force de tension qui agit en vertical sur la pièce de corde entre x_1 et x_2:



$$F = T \sin(\alpha_2) - T \sin(\alpha_1)$$
$$\approx T u_x(x_2) - T u_x(x_1)$$
$$\approx T u_{xx}(x_1)(x_2 - x_1)$$

car $\quad u_{xx}(x_1) = \lim_{t \to 0} \dfrac{u_x(x_1 + h) - u_x(x_1)}{h}$

D'un autre côté, pour le loi de Newton, $F = ma$, où

$m =$ masse de la corde entre x_1 et x_2

$=$ (densité de masse) $\cdot$ (longueur de la corde entre x_1 et x_2)

$$= \rho \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2}\, dx \approx \rho \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx \approx \rho (x_2 - x_1)$$

$a =$ acceleration $= \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = u_{tt}(x,t)$

$$\Rightarrow \quad T u_{xx}(x,t)(x_2 - x_1) = \rho (x_2 - x_1) u_{tt}(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

où $a^2 = \dfrac{T}{\rho} > 0.$