FOGLIO DI ESERCIZI 4

...E FINALMENTE UN PO' DI ALGEBRA!

Esercizio 1 (Automorfismi di $\mathbb{Z}^2$)**.** Lo scopo di questo esercizio è mostrare che il gruppo di automorfismi di gruppo di $\mathbb{Z}^2$ è isomorfo a $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$.

- Mostare che, dati $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, l'applicazione
$$(n,m) \mapsto (an+bm, cn+dm) \tag{1}$$
definisce un omomorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}^2$ in se stesso.
- Mostrare che una matrice $A \in \mathcal{M}(2\times 2,\mathbb{Z})$ è invertibile in $\mathcal{M}(2\times 2,\mathbb{Z})$ se e solo se $\det A = \pm 1$.
- Dedurre che, data $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$, con entrate a,b,c,d, (1) definisce un automorfismo di $\mathbb{Z}^2$.
- Mostrare che tutti gli automorfismi di $\mathbb{Z}^2$ sono della forma (1).
- Mostare che questa costruzione induce un isomorfismo tra il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{Z}^2$ e $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$.

Esercizio 2 (Riemann-Hurwitz per funzioni meromorfe)**.** Data la funzione meromorfa su $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ definita da:
$$f(z) = \frac{z^3}{1-z^2} \ ,$$

- Calcolare gli zeri ed i poli di f ed i relativi ordini.
- Verificare la formula
$$\sum_{p\in\mathbb{C}\mathrm{P}^1} \mathrm{ord}_p(f) = 0 \ .$$
- Trovare i punti di ramificazione e di diramazione di f.
- Verificare la formula di Riemann-Hurwitz.

Esercizio 3 (Ottimalità del teorema di Harnack)**.** Consideriamo il sottoinsieme Σ di $\mathbb{C}^2$ definito da
$$y^2 = x^3 - x \ .$$

- Mostrare che il proiettivizzato di Σ è una curva algebrica proiettiva non-singolare in $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$.
- Mostrare che $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ y^2 = x^3 - x\}$ ha due componenti connesse, una compatta ed una illimitata. Trovare i punti all'infinito.
- Dedurre che l'insieme dei punti di Σ in $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ ha due componenti connesse.
- Verificare che $\Sigma \cap \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ ha un numero di componenti connesse massimale rispetto al teorema di Harnack.

Esercizio 4 (Mappa antipodale)**.** Verificare che la mappa antipodale sulla sfera di Riemann è espressa, nelle coordinate date da una carta affine, da

$$z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}} .$$

Esercizio 5 (Curve iperellittiche)**.** Consideriamo il sottoinsieme

$$\Sigma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \, : \, z^2 = p(w)\} ,$$

dove p è un polinomio di grado $n > 2$.

- Ricordare che, per il teorema fondamentale dell'algebra, p si scrive nella forma
$$p(w) = (w - a_1) \cdots (w - a_n)$$
per $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.
- Mostrare che il polinomio $p(z, w) = z^2 - p(w)$ è riducibile se e soltanto se p è della forma $p(w) = q(w)^2$.
- Supponiamo d'ora in poi che gli $a_1, \ldots, a_n$ sono a due a due distinti. Osservare che $p'(a_i) \neq 0$ per $i = 1, \ldots, n$.
- Mostrare che Σ è una curva algebrica liscia in $\mathbb{C}^2$. (*Suggerimento: distinguere i casi $z = 0$ e $z \neq 0$.*)
- Dedurre dai punti precedenti che Σ è superficie di Riemann.
- Mostrare che la mappa $\pi : \Sigma \to \mathbb{C}$ definita da $\pi(z, w) = w$ ha grado due, e trovare i punti di ramificazione e diramazione.

Esercizio 6 (Rivestimenti ramificati tra curve di Fermat)**.** Consideriamo la curva di Fermat di grado m, definita da

$$\Sigma_m = \{[X : Y : Z] \, : \, X^m + Y^m + Z^m = 0\} .$$

- Mostrare che la mappa F definita da
$$[X : Y : Z] \mapsto [X^p : Y^p : Z^p]$$
è ben definita come applicazione da $\mathbb{CP}^2$ a $\mathbb{CP}^2$, ed induce un'applicazione olomorfa da Σ_{mp} a Σ_m.
- Mostrare che la preimmagine di un elemento di Σ_m avente tutte le coordinate non nulle è composta da p^2 elementi, e dedurre che F ha grado p^2.
- Mostrare che il gruppo composto dagli elementi
$$[X : Y : Z] \mapsto [\omega^i X : \omega^j Y : \omega^k Z] ,$$
dove ω è una radice p-esima dell'identità, agisce su Σ_{mp} per biolomorfismi, in maniera transitiva sulle fibre di F, ed il sottogruppo che agisce banalmente su Σ_{mp} ha ordine p.
- Quanti e quali sono i punti di ramificazione e diramazione?
- Utilizzando la formula per il genere della curva di Fermat, verificare la formula di Riemann-Hurwitz.