FOGLIO DI ESERCIZI 3

ANCORA TOPOLOGIA ED ANALISI COMPLESSA...

Esercizio 1 (Il rivestimento universale)**.** Data una superficie Σ, vogliamo costruire esplicitamente *un* rivestimento universale per Σ. Fissiamo quindi $x_0 \in \Sigma$ e definiamo

$$\widetilde{\Sigma} = \{\gamma : [0,1] \to \Sigma \,|\, \gamma(0) = x_0\}/\sim$$

dove $\sim$ è la relazione di omotopia tra cammini ad estremi fissati. Definiamo inoltre la proiezione $\pi : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$ mediante $\pi[\gamma] = \gamma(1)$.

- Mostrare che gli insiemi della forma

$$(\gamma, U) = \{[\gamma \cdot \gamma'] \,:\, \gamma' \text{ è contenuto in } U\}\ ,$$

  dove U è un aperto semplicemente connesso di Σ, formano una base per una topologia su $\widetilde{\Sigma}$.
- Mostrare che la proiezione π è continua.
- Mostrare che se $U \subset \Sigma$ è semplicemente connesso e $x \in U$, allora $\pi^{-1}(U)$ è l'unione disgiunta degli insiemi (γ, U), al variare di $[\gamma]$ tra le classi di omotopia di cammini tra x_0 e x.
- Mostrare che la restrizione di π a ciascun (γ, U) è un omeomorfismo su U.
- Dedurre che $\pi : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$ è un rivestimento.
- Mostrare che $\widetilde{\Sigma}$ è semplicemente connesso.
- Mostrare, usando il teorema di sollevamento, che se $p : M \to \Sigma$ è un rivestimento e M è semplicemente connesso, allora esiste un omeomorfismo $\varphi : M \to \widetilde{\Sigma}$ tale che $\pi \circ \varphi = p$.

Esercizio 2 (Trasformazioni di deck)**.** Lo scopo di questo esercizio è capire come l'isomorfismo di gruppi tra $\pi_1(\Sigma)$ e $\mathrm{Aut}(\pi : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma)$ dipende dalla scelta del punto base x_0 e da una sua preimmagine $\widetilde{x}_0$. Definiamo allora

$$F_{\widetilde{x}_0} : \mathrm{Aut}(\widetilde{\Sigma}, \pi) \to \pi_1(\Sigma, x_0)$$

che associa a $g \in \mathrm{Aut}(\widetilde{\Sigma}, \pi)$ la classe di omotopia del cammino $\pi \circ \gamma$, dove $\gamma : [0,1] \to \widetilde{\Sigma}$, $\gamma(0) = \widetilde{x}_0$, $\gamma(1) = g(\widetilde{x}_0)$.

- Mostrare che, dati $\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0 \in \widetilde{\Sigma}$, la composizione $F = F_{\widetilde{y}_0} \circ F_{\widetilde{x}_0}^{-1}$ è della forma $F[\alpha] = [\eta^{-1} \cdot \alpha \cdot \eta]$, per η un cammino che connette $x_0 = \pi(\widetilde{x}_0)$ a $y_0 = \pi(\widetilde{y}_0)$.
- Dedurre che, se $\pi(\widetilde{x}_0) = \pi(\widetilde{x}'_0) = x_0$, allora la composizione $F = F_{\widetilde{x}'_0} \circ F_{\widetilde{x}_0}^{-1}$ è un automorfismo interno di $\pi_1(\Sigma, x_0)$.

(*Suggerimento: sono permessi, anzi suggeriti, i disegni.*)

Esercizio 3 (Gruppo fondamentale delle superfici chiuse orientabili)**.** Mostrare che il gruppo fondamentale della superficie chiusa, connessa, orientabile S_g di genere $g > 0$ è isomorfo a

$$\langle A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g \mid A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = 1 \rangle \ .$$

(*Suggerimento: è permesso usare il teorema di Van Kampen.*)

Esercizio 4 (Gruppi di automorfismi)**.** Consideriamo l'applicazione $\Phi : \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{Bihol}(\mathbb{CP}^1)$ che associa alla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $ad - bc \neq 0$, la funzione olomorfa

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \tag{1}$$

di $\mathbb{CP}^1$ in se stesso.

- Mostrare che Φ è un omomorfismo di gruppi.
- Usando ora che i biolomorfismi di $\mathbb{CP}^1$ sono tutti della forma (1) con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$, mostrare che Φ induce un isomorfismo di gruppi tra $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ e $\mathrm{Bihol}(\mathbb{CP}^1)$.
- Usando che i biolomorfismi di $\mathbb{H}$ sono tutti della forma (1) con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$, mostrare che Φ induce un isomorfismo di gruppi tra $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ e $\mathrm{Bihol}(\mathbb{H})$.

Esercizio 5 (Cerchi generalizzati)**.** Si definisce "cerchio generalizzato" in $\mathbb{C}$ un sottoinsieme che sia un cerchio o una retta. In questo esercizio vogliamo mostrare che le trasformazioni di Möbius preservano i cerchi generalizzati.

- Mostrare che i cerchi generalizzati in $\mathbb{C}$ sono precisamente i sottoinsiemi definiti da:
$$\alpha z \overline{z} + \beta z + \overline{\beta} \overline{z} + \gamma = 0$$
con $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ e $\alpha\gamma < |\beta|^2$.
- Mostrare che ogni trasformazione di Möbius si ottiene come composizione di trasformazioni della forma
$$f(z) = \frac{1}{z} \qquad \text{e} \qquad g(z) = az + b \text{ per } a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \ .$$
(*Suggerimento: in effetti basta comporne tre.*)
- Mostrare che ogni trasformazione di Möbius manda cerchi generalizzati in cerchi generalizzati. (*Suggerimento: basta mostrarlo per le trasformazioni della forma sopra.*)
- Quando succede che f manda un cerchio in una retta?

Vale il seguente teorema (non banale!) di "uniformizzazione" degli anelli.

Teorema. Data una superficie di Riemann Σ omeomorfa ad un anello, Σ è biolomorfa ad esattamente una delle seguenti superfici di Riemann:

- Il piano puntato $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- Il disco puntato $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$;
- L'anello $\mathbb{A}_\rho = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \rho < |z| < 1\}$, per qualche $\rho \in (0, 1)$.

Esercizio 6 (Strutture conformi sugli anelli)**.** In questo esercizio vogliamo capire meglio il teorema di uniformizzazione degli anelli.

- Mostrare che, se $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{D}^*$ è olomorfa, allora f si estende ad una funzione olomorfa limitata su $\mathbb{C}$.
- Mostrare che $\mathbb{C}^*$ e $\mathbb{D}^*$ non sono biolomorfi. (Ricordarsi il teorema di Liouville!)
- Costruire un diffeomorfismo tra $\mathbb{C}^*$ e $\mathbb{D}^*$, e un diffeomorfismo tra $\mathbb{C}^*$ e $\mathbb{A}_\rho$ per $\rho \in (0, 1)$, e verificare che i diffeomorfismi costruiti non sono olomorfi. (*Suggerimento: è comodo usare coordinate polari.*)

Vediamo ora di individuare il rivestimento universale delle superfici di Riemann omeomorfe ad un anello, come nel teorema.

- Mostrare che la mappa $z \mapsto e^z$ definisce un biolomorfismo tra il quoziente di $\mathbb{C}$ per il gruppo generato da $z \mapsto z + 2\pi i$, e $\mathbb{C}^*$.
- Mostrare che la mappa $z \mapsto e^{iz}$ definisce un biolomorfismo tra il quoziente di
$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \Im(z) > 0\}$$
per il gruppo generato da $z \mapsto z + 2\pi$, e $\mathbb{D}^*$, e tra il quoziente di una "striscia"
$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < \Im(z) < -\log \rho\}$$
e $\mathbb{A}_\rho$.
- Dedurre che il rivestimento universale di $\mathbb{C}^*$ è biolomorfo a $\mathbb{C}$, e che il rivestimento universale di $\mathbb{D}^*$ ed $\mathbb{A}_\rho$ è biolomorfo a $\mathbb{H}$. (*Suggerimento: usare l'esercizio 3 del foglio esercizi 2.*)