FOGLIO DI ESERCIZI 2

ADESSO TOCCA ALL'ANALISI COMPLESSA

Vogliamo dimostrare il seguente teorema.

Teorema (teorema della funzione implicita – versione olomorfa)**.** Data una funzione $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ olomorfa, e dato $(z_0, w_0) \in F^{-1}(0)$, se

$$\frac{\partial F}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0 \ ,$$

allora esistono un intorno aperti U di z_0 e V di w_0 tali che

$$F^{-1}(0) \cap (U \times V) = \{(z, w) \ : \ z = f(w)\} \ ,$$

dove $f : U \to V$ è una funzione olomorfa.

Procediamo per passi. Prima un po' di algebra lineare.

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ la mappa $\phi(x, y) = x + iy$.

- Mostrare che ϕ è un isomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.
- Data un'applicazione lineare $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, quindi della forma $L(z) = \lambda(z)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$, scrivere la mappa corrispondente in coordinate reali. (Ovvero, dare la matrice associata a $\phi^{-1} \circ L \circ \phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Suggerimento: scomporre $\lambda = \Re(\lambda) + i\Im(\lambda)$.)
- Fare la stessa cosa nella forma esponenziale, dato $\lambda = re^{i\theta}$.
- Mostrare che la mappa $\Phi(L) = \phi^{-1} \circ L \circ \phi$ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare iniettiva da $\mathbb{C}$ allo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. È suriettiva?
- Mostrare che il determinante della matrice associata a $\phi^{-1} \circ L \circ \phi$ è uguale a $|\lambda|^2$.
- Dedurre che $\phi^{-1} \circ L \circ \phi$ è invertibile se e soltanto se $L \neq 0$.
- Mostrare che la restrizione di Φ da $\mathbb{C}^*$ a $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ è un omomorfismo di gruppi.

Torniamo finalmente alle funzioni olomorfe.

Esercizio 2. Supponiamo che $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sia una funzione olomorfa, con derivata complessa $f'(z_0)$ nel punto $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Usando le equazioni di Cauchy-Riemann, mostrare che il differenziale di f, pensato come un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, corrisponde a $\phi(f'(z_0))$.

Supponiamo ora che $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ sia una funzione olomorfa, con derivate parziali complesse

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}(z_0, w_0), \frac{\partial F}{\partial w}(z_0, w_0) \right)$$

nel punto $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$.

- Esprimere in coordinate reali la matrice 2×4 associata al differenziale della F in (x_0, y_0, u_0, v_0), dove $z_0 = x_0 + iy_0$ e $w_0 = u_0 + iv_0$ (in altre parole, lo Jacobiano reale $J_F(x_0, y_0, u_0, v_0)$).

- Osservare quindi che
$$\frac{\partial F}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0 \ ,$$
se e soltanto se il minore 2×2 di destra di J_F ha determinante non nullo nel punto (x_0, y_0, u_0, v_0).
- Enunciare il teorema della funzione implicita (versione reale) per una funzione $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$.
- Vedere che, nelle ipotesi del teorema enunciato ad inizio del foglio esercizi (versione complessa), possiamo applicare il teorema della funzione implicita (versione reale) e dedurre che esistono intorni U di (x_0, y_0) e V di (u_0, v_0) ed una funzione $f : U \to V$ tale che (in coordinate reali)
$$F^{-1}(0) \cap (U \times V) = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \ : \ (x, y) = f(u, v)\} \ .$$
- Esprimere il differenziale di f in (x_0, y_0) e mostrare che soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann (i.e. f è olomorfa in z_0).
- Esprimere quindi la derivata complessa di f in z_0.

Esercizio 3. Trovare un biolomorfismo esplicito tra la "striscia"
$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < \Im(z) < a\} \ ,$$
per qualche $a > 0$, e il semipiano superiore
$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Im(z) > 0\} \ .$$
(Suggerimento: iniziare con $a = \pi$ e poi passare al caso generale.)

Esercizio 4. Mostrare che, se $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, è un'applicazione liscia che preserva gli angoli e preserva l'orientazione, allora f è olomorfa.

Esercizio 5. Sia $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa omogenea di grado $d \geq 1$, cioè tale che:
$$P(\lambda z_0, \ldots, \lambda z_{n-1}) = \lambda^d P(z_0, \ldots, z_{n-1}) \ .$$
Mostrare, utilizzando soltanto questa definizione, che le derivate parziali di P sono funzioni omogenee di grado $d - 1$.