FEUILLE D'EXERCICE 2

Exercice 1. Calculer la matrice jacobienne des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivantes, dans tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

(1) $f(x, y) = (x + 3y^2, 6x + 7y^2)$
(2) $f(x, y) = (2xy, 1 - x^3 y - 4xy^2)$
(3) $f(x, y) = (e^x \sin(y), -e^x \cos(y))$

Exercice 2. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, la matrice hessienne dans le point $p_0 \in \mathbb{R}^n$ est définie comme :

$$D^2 f(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n}(p_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p_0) \end{pmatrix} .$$

Observer que la matrice $D^2 f(p_0)$ est symétrique par conséquence du théorème de Schwartz. Calculer la matrice hessienne et le laplacien des fonctions suivantes, dans tout point $p_0 \in \mathbb{R}^n$:

(1) $f_1(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$
(2) $f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
(3) $f_3(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$

Exercice 3. Soit $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la fonction définie par

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} .$$

(1) Montrer, en utilisant les coordonnées cartésiennes (x, y), que $\Delta u = 0$.
(2) Exprimer la fonction u en coordonnées polaires.
(3) Montrer, en utilisant les coordonnées polaires, que $\Delta u = 0$.

Exercice 4. Soit $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ une fonction radiale, c'est-à-dire, $u(x_1, \ldots, x_n) = f(r)$ où

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

et $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

(1) Montrer que, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_i}{r} f'(r) .$$

(2) Montrer que, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_i^2}{r^2} f''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right) f'(r) .$$

(3) En utilisant la relation $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, déduire que

$$\Delta u(x_1, \ldots, x_n) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) .$$

(4) Montrer que, si $u(x_1, \ldots, x_n) = f(r)$ est une solution radiale de l'équation $\Delta u = 0$, alors la fonction $h(r) = f'(r)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire

$$h'(r) + \frac{n-1}{r} h(r) = 0 .$$

(5) Montrer que toute solution radiale de l'équation $\Delta u = 0$ est de la forme

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} A \log(r) + B & n = 2 \\ \frac{A}{r^{n-2}} + B & n > 2 \end{cases}$$

pour $A, B \in \mathbb{R}$.