FEUILLE D'EXERCICE 1

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(1) f est-elle Gâteaux-différentiable dans $(0,0)$? Si oui, calculer la dérivée suivant un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$.

(2) f est-elle Fréchet-différentiable dans $(0,0)$?

(3) f est-elle continue dans $(0,0)$? [Piste : utiliser l'inégalité $|xy| \leq x^2 + y^2$]

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(1) f est-elle Gâteaux-différentiable dans $(0,0)$? Si oui, calculer la dérivée suivant un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$.

(2) f est-elle Fréchet-différentiable dans $(0,0)$?

(3) f est-elle continue dans $(0,0)$? [Piste : considérer la restriction à la courbe $\gamma(t) = (t, t^3)$]

Exercice 3. Calculer le gradient des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes, dans tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

(1) $f(x,y) = x + 3y^2$

(2) $f(x,y) = \frac{4y}{x^2+1}$

(3) $f(x,y) = e^x \sin(y)$

En plus, pour chaque fonction calculer la dérivée suivant le vecteur $v = (1,2)$ au point $(0,1)$.

Exercice 4. Calculer le gradient des fonctions $g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g_3 : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définies par :

(1) $g_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$

(2) $g_2(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

(3) $g_3(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}}$