Materiale ed esercizi di Geometria e Algebra

Fulvio Bisi, Francesco Bonsante, Alessandro Ghigi

CAPITOLO 0

Preliminari

1. Insiemistica e logica

Esercizio 0.1. Siano U, V, W insiemi, tali che $W \subset V$; mostrare che $U \cap W \subset U \cap V$ e $U \cup W \subset U \cup V$.

Risoluzione. Prendiamo un elemento x dell'intersezione $U \cap W$; per definizione, $x \in U$ e $x \in W$. Ora, se $a \in W$, allora $a \in V$, poiché $W \subset V$. Quindi, $x \in V$, e possiamo concludere che x appartiene contemporaneamente a U e a V, ossia $x \in U \cap V$, quindi $U \cap W \subset U \cap V$.

Analogamente, sia $x \in U \cup W$; allora, $x \in U$ oppure $x \in W$. Se $x \in U$, sicuramente $x \in U \cup V$. Se $x \in W$, appartiene anche a V, sempre perché $W \subset V$, pertanto x appartiene a U o a V, ossia $x \in U \cup V$, quindi $U \cup W \subset U \cup V$. □

2. Strutture algebriche

Esempio 0.1. Consideriamo l'insieme $A = \{-1, 0, 1\}$ con un'operazione interna di addizione $+\colon A \times A \to A$ definita dalle seguenti regole:

$$a + 0 = 0 + a = a \qquad \forall\, a \in A\,; \tag{0.1a}$$

$$1 + (-1) = (-1) + 1 = 0\,; \tag{0.1b}$$

$$1 + 1 = -1\,; \tag{0.1c}$$

$$(-1) + (-1) = 1\,. \tag{0.1d}$$

Mostriamo che $(A, +)$ è un gruppo commutativo.

La proprietà commutativa è immediatamente verificata: se i due termini dell'addizione coincidono è ovvia; se sono diversi, quando almeno uno è nullo (ossia, l'elemento 0), è vera per la regola 0.1a. Altrimenti, i due termini possono essere solo 1 e -1: la regola 0.1b garantisce che l'ordine nell'addizione non cambia il risultato.

Chiaramente, in base alla regola 0.1a, l'elemento 0 è elemento neutro per l'operazione, e ogni elemento ammette opposto: 0 è opposto di se stesso, e l'opposto di 1 è -1 e viceversa, per la regola 0.1b.

Resta da verificare la proprietà associativa, ossia se è vero che

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \forall\, a, b, c \in A\,.$$

Il numero esiguo di elementi di A consente di verificare la validità della proprietà analizzando tutti i casi possibili.

Se uno degli elementi è nullo, la proprietà è vera:

$$(0+b)+c = b+c, \;\text{ e }\; 0+(b+c) = b+c\,,$$
$$(a+0)+c = a+c, \;\text{ e }\; a+(0+c) = a+c\,,$$
$$(a+b)+0 = a+b, \;\text{ e }\; a+(b+0) = a+b\,,$$

per tutti i valori di a, b, c.

Vediamo gli altri casi, ossia in cui nessuno degli elementi sia nullo. Cominciamo a considerare $a = 1$ e $b = 1$. Allora:

$$(1+1)+c = -1+c = \begin{cases} 0 \text{ se } c = 1 \\ 1 \text{ se } c = -1 \end{cases}$$

e

$$1+(1+c) = 1+\begin{cases} -1 \text{ se } c = 1 \\ 0 \text{ se } c = -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ se } c = 1 \\ 1 \text{ se } c = -1 \end{cases}$$

quindi la proprietà è vera.

Si lascia al lettore il compito della verifica per gli altri casi che rimangono, ossia $a = -1$, $b = -1$; $a = 1$, $b = -1$, e infine $a = -1$, $b = 1$ (la proprietà commutativa consente di omettere la verifica per $a = -1$ e $b = 1$?).

Pertanto, sono valide tutte le proprietà necessarie, e $(A, +)$ è un gruppo abeliano.

Esempio 0.2. Introduciamo ora nella struttura algebrica $(A, +)$ dell'Esempio 0.1 un'operazione interna di moltiplicazione $(\cdot)$ che opera come nel modo 'standard' fra i numeri $0, 1, -1$, ossia secondo la seguente tabellina:

·	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

Mostriamo che la struttura algebrica $(A, +, \cdot)$ è un anello, e caratterizziamolo.

La nostra moltiplicazione opera in modo standard, quindi è sicuramente associativa (e anche commutativa): lo è per tutti i numeri interi, in particolare lo è per i numeri $0, 1, -1$. Inoltre, l'elemento 1 risulta essere elemento neutro della moltiplicazione, e vale la legge di annullamento del prodotto.

Poiché, invece, l'operazione di addizione non è standard, rimane da verificare al proprietà distributiva:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \forall\, a, b, c \in A\,.$$

Se $a = 0$, abbiamo

$$0 \cdot (b+c) = 0 \qquad \text{e} \qquad 0 \cdot b + 0 \cdot c = 0 + 0 = 0\,,$$

per la legge di annullamento del prodotto, quindi la proprietà in questo caso è valida.

Analogamente, per $a = 1$ si ha:

$$1 \cdot (b+c) = b+c \qquad \text{e} \qquad 1 \cdot b + 1 \cdot c = b+c\,.$$

Resta il caso in cui $a = -1$; anzitutto, osserviamo che, in generale, $-1 \cdot x = -x$, ossia l'opposto di x rispetto alla somma. A seconda dei valori di b e c abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&-1 \cdot (0 + c) = -1 \cdot c = -c, \ \text{ e } \ -1 \cdot 0 + -1 \cdot c = 0 - c = -c\,,\\
&-1 \cdot (b + 0) = -1 \cdot b = -b, \ \text{ e } \ -1 \cdot b + -1 \cdot 0 = -b + 0 = -b\,,\\
&-1 \cdot (1 + 1) = -1 \cdot (-1) = 1, \ \text{ e } \ -1 \cdot 1 + -1 \cdot 1 = -1 + (-1) = 1\,,\\
&-1 \cdot (1 + (-1)) = -1 \cdot 0 = 0, \ \text{ e } \ -1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = -1 + 1 = 0\,,\\
&-1 \cdot (-1 + 1) = -1 \cdot 0 = 0, \ \text{ e } \ -1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 1 + (-1) = 0\,,\\
&-1 \cdot (-1 + (-1)) = -1 \cdot 1 = -1, \ \text{ e } \ -1 \cdot (-1) + -1 \cdot (-1) = 1 + 1 = -1\,.
\end{aligned}
$$

Riassumendo, in ogni caso la proprietà distributiva rimane valida.

Pertanto, la struttura algebrica $(A, +, \cdot)$ è un *anello*, perché la moltiplicazione è associativa e distributiva sulla somma. Inoltre, la moltiplicazione è commutativa e ammette elemento neutro: pertanto, è un *anello commutativo unitario*. Poiché vale la legge di annullamento del prodotto, è anche un dominio di integrità.

Inoltre, escluso l'elemento neutro della sommma 0, ogni elemento ha l'inverso per la moltiplicazione: l'inverso di 1 è 1 e quello di -1 è -1. Con le operazioni introdotte, quindi, A è un **campo**.

CAPITOLO 1

Vettori applicati e geometria dello spazio

1. Vettori applicati: struttura algebrica di $\mathbb{E}^3_O$

1.1. Proprietà associativa dell'addizione fra vettori. Dimostriamo la proprietà associativa per l'addizione fra vettori di $\mathbb{E}^3_O$

Siano $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ tre vettori applicati in O (Figura 1.1); per semplicità li prendiamo in un piano (vedremo alla fine come il ragionamento non cambia).

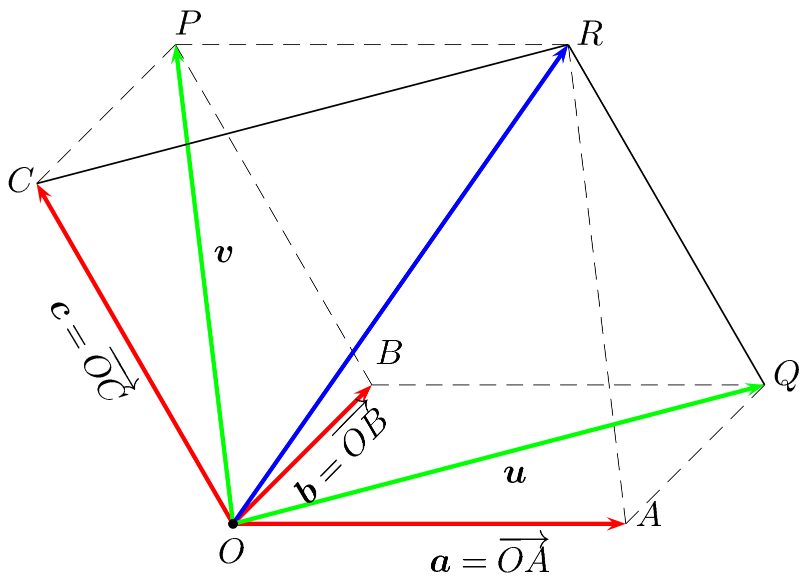

Figura 1.1: Costruzione per la dimostrazione della proprietà associativa dell'addizione fra vettori in $\mathbb{E}^3_O$.

Costruiamo $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$; osserviamo che $\overline{CP} \cong \overline{OB}$ (proprietà dei parallelogrammi).

Sommiamo ora $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$; osserviamo che per costruzione (parallelogramma), abbiamo $\overline{PR} \cong \overline{OA}$ e $\overline{OP} \cong \overline{AR}$.

Sommiamo ora per primi i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$: otteniamo $\overrightarrow{OQ} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Costruiamo i triangoli CPR e OBQ; questi hanno $\overline{CP} \cong \overline{OB}$ e $\overline{PR} \cong \overline{OA} \cong \overline{BQ}$ per costruzione; inoltre, gli angoli $C\widehat{P}R$ e $O\widehat{B}Q$ sono congruenti perché hanno i lati paralleli.

I triangoli sono congruenti, pertanto, $\overline{CR} \cong \overline{OQ}$.

Analogamente, $\overline{OB} \cong \overline{AQ}$, $\overline{OP} \cong \overline{AR}$, e paralleli; pertanto $\overline{RQ} \cong \overline{PB} \cong \overline{OC}$.

Il quadrilatero $OCQR$ ha i lati opposti a due a due congruenti, quindi è un parallelogramma; quindi la sua diagonale corrisponde alla somma dei vettori associati ai due lati: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC}$. Riassumendo:

$$\overrightarrow{OR} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) .$$

Le relazioni di parallelismo usate non cambiano se i tre vettori non sono complanari; il ragionamento fatto rimane valido anche in quel caso. □

1.2. Esercizi proposti.

Esercizio 1.1. Sia $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ una base di $\mathbb{E}^3_O$. Si determini quali tra le seguenti coppie di vettori hanno la stessa direzione:

(a) $\bullet \boldsymbol{u}_1$ e $\bullet\ \boldsymbol{u}_2$;
(b) $\bullet \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ e $\bullet\ 3\boldsymbol{u}_1$;
(c) $\bullet 3\boldsymbol{u}_1 + 6\boldsymbol{u}_2 + 9\boldsymbol{u}_3$ e $\bullet\ 4\boldsymbol{u}_1 + 8\boldsymbol{u}_2 + 12\boldsymbol{u}_3$;
(d) $\bullet \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$ e $\bullet\ 2\boldsymbol{u}_1 + 4\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$;
(e) $\bullet 6\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 - 10\boldsymbol{u}_3$ e $\bullet\ 15\boldsymbol{u}_1 + 5\boldsymbol{u}_2 - 25\boldsymbol{u}_3$;
(f) $\bullet (2 + \sqrt{3})\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ e $\bullet\ \boldsymbol{u}_1 + (2 - \sqrt{3})\boldsymbol{u}_2$.

Risposta: (c), (e), (f).

Esercizio 1.2. Sia $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ una base di $\mathbb{E}^3_O$. Si dica quali fra i seguenti insiemi formano una base di $\mathbb{E}^3_O$:

(a) $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2\}$;
(b) $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3\}$;
(c) $\{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$;
(d) $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3\}$;
(e) $\{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3\}$;
(f) $\{\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3\}$.

Risposta: (b), (c), (d), (f).

Esercizio 1.3. Per ciascuna delle basi individuate nell'Esercizio 1.2 si calcolino le corrispondenti coordinate del vettore:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 .$$

Risposta: (b): $(0, 3, 1)$, (c): $(2, -1, 1)$, (d): $(-2, 2, 1)$, (f): $(-2, 0, 3)$.

Esercizio 1.4. Sia $\{\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}\}$ una base ortonormale di $\mathbb{E}^3_O$, e si consideri il parallelepipedo in Figura 1.2.

(a) Sapendo che il lato parallelo a $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ è lungo $\frac{3}{2}$, il lato parallelo a $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ è lungo 4 e il lato parallelo a $\hat{\boldsymbol{k}}$ è lungo 2, trovare le coordinate dei vertici del parallelepipedo.
(b) Verificare che i vettori $\boldsymbol{u}_1 = \overrightarrow{OQ_1}$, $\boldsymbol{u}_2 = \overrightarrow{OQ_2}$ e $\boldsymbol{u}_3 = \overrightarrow{OQ_3}$ formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{E}^3_O$.
(c) Calcolare le coordinate di $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OQ_0}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ proposta nel punto precedente.

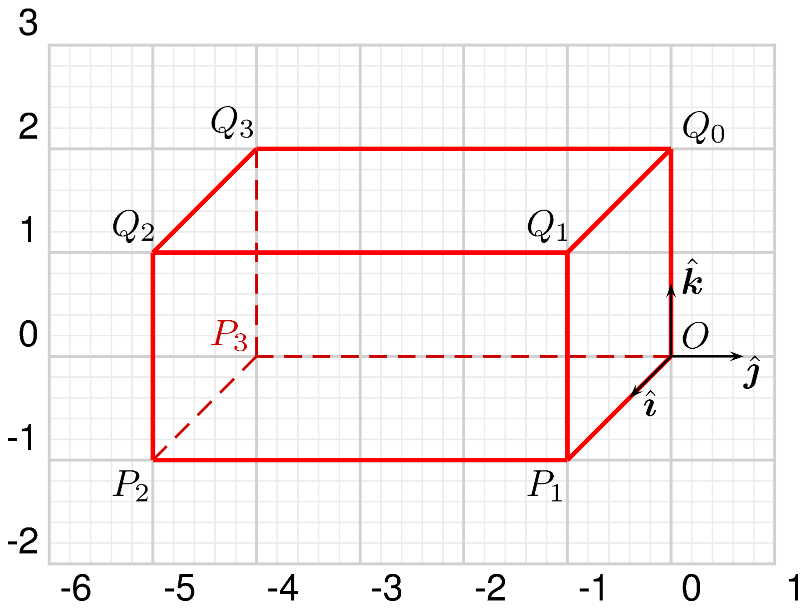

Figura 1.2: parallelepipedo per l'Esercizio 1.4.

Risposta: (a): $P_1 = (3/2, 0, 0)$, $P_2 = (3/2, -4, 0)$, $P_3 = (0, -4, 0)$, $Q_0 = (0, 0, 2)$, $Q_1 = (3/2, 0, 2)$, $Q_2 = (3/2, -4, -2)$, $Q_3 = (0, -4, 2)$. (c): $[\overrightarrow{OQ_0}] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 1.5. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Considerare i seguenti punti:

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare un'equazione cartesiana della retta $r = AB$.

Risoluzione. La retta r in forma parametrica può essere descritta come

$$r = \{P \in \mathcal{E} \mid P = A + t\,\overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R}\}$$

e le coordinate del vettore $\overrightarrow{AB}$ si trovano mediante le differenze fra le coordinate del vettore $\overrightarrow{OB}$ e quelle del vettore $\overrightarrow{OA}$:

$$[\overrightarrow{AB}] = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha, pertanto, per le coordinate generiche del punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x = 0 + 3t = 3t \\ y = 2 + (-1)t = 2 - t \qquad t \in \mathbb{R}\,; \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

ricavando $t = 2 - y$ dalla seconda equazione, e sostituendo nella prima e terza equazione otteniamo

$$\begin{cases} x = 3(2 - y) = 6 - 3y \\ z = -1 + 2(2 - y) = 3 - 2y\,. \end{cases}$$

Al medesimo risultato si può pervenire sommando la prima equazione alla seconda moltiplicata per 3, e la terza equazione alla seconda moltiplicata per 2, per eliminare il parametro in due equazioni differenti e indipendenti:

$$\begin{cases} x + 3y = \cancel{3t} + 6 \cancel{-3t} = 6 \\ z + 2y = -1 + \cancel{2t} + 4 \cancel{-2t} = 3\,. \end{cases}$$

Risposta: $r\colon \begin{cases} x + 3y = 6 \\ z + 2y = 3\,. \end{cases}$ Per esteso, $r\colon \{P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \mid x + 3y - 6 = z + 2y - 3 = 0\}$.

Esercizio 1.6. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Considerare l'equazione cartesiana della retta r:

$$\begin{cases} x - 7y + 2z - 1 = 0 \\ 2x - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

Fornire una rappresentazione parametrica di r e scriverne un vettore direttore $\boldsymbol{d}_r$.

Risoluzione. Posso scegliere z come parametro, che rende immediata la soluzione, poiché dalla seconda equazione si ricava immediatamente x in funzione del parametro $t = z$:

$$2x = 3z - 5 = 3t - 5 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}t - \frac{5}{2}\,;$$

sostituendo x ottenuto da questa nella prima equazione abbiamo, sempre con $z = t$:

$$\frac{3}{2}t - \frac{5}{2} - 7y + 2t - 1 = 0 \Longrightarrow y = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\,.$$

Le coordinate del direttore si ottengono prendendo i coefficienti del parametro t nelle 3 equazioni per x, y e z, nell'ordine:

$$[\boldsymbol{d}] = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

che possono essere moltiplicate per 2 per ottenere un vettore sempre nello $\mathrm{Span}(\boldsymbol{d})$, ma più semplice.

Risposta: $r\colon \begin{cases} x = \frac{3}{2}t - \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ z = t, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ ovvero $P \in r \Longleftrightarrow P = P_0 + t\boldsymbol{v}$, $t \in \mathbb{R}$, con $P_0 = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $[\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{d}] = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\boldsymbol{d}_r = 3\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} + 2\hat{\boldsymbol{k}}\,.$

Esercizio 1.7. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Fornire una rappresentazione parametrica del piano descritto in forma cartesiana da

$$\pi\colon x - 2y - 5z + 12 = 0\,,\ \text{ossia}\ \{P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \mid x - 2y - 5z + 12 = 0\}\,.$$

e scrivere due vettori che individuano la sua giacitura giac_π.

Risoluzione. Possiamo scegliere come parametri liberi s e t e porre

$$y = t\,, z = s \qquad s, t \in \mathbb{R}\,;$$

si ricava immediatamente

$$x = 2y + 5z - 12 = 2t + 5s - 12\,,$$

ossia

$$\begin{cases} x = 2t + 5s - 12 \\ y = t \\ z = s \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

In forma vettoriale:

$$P \in \pi \iff P = P_0 + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}\,, \quad s, t \in \mathbb{R}\,,$$

con $P_0 = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{u}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{v}] = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; la giacitura di π è $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$.

Risposta: $\begin{cases} x = 2t + 5s - 12 \\ y = t \\ z = s \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}\,;\ \text{giac}_\pi = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ con $\boldsymbol{u} = 2\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\boldsymbol{v} = 5\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$.

Esercizio 1.8. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Fornire una rappresentazione parametrica del piano descritto in forma cartesiana da

$$\pi\colon x - 5z + 1 = 0$$

e scrivere due vettori che individuano la sua giacitura giac_π.

Risoluzione. Osserviamo che y non compare nell'equazione, *quindi può assumere qualunque valore*, ossia è libero. Possiamo scegliere come parametri liberi s e t e porre, come nell'Esercizio 1.7:

$$y = t\,, z = s \qquad s, t \in \mathbb{R}\,;$$

otteniamo

$$\begin{cases} x = 5s + 1 \\ y = t \\ z = s \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}\,,$$

da cui ricaviamo $\text{giac}_\pi = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ con $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\boldsymbol{v} = 5\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$.

Risposta: $\begin{cases} x = 5s + 1 \\ y = t \\ z = s \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R};\ \text{giac}_\pi = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ con $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\boldsymbol{v} = 5\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$.

Esercizio 1.9. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Fornire una rappresentazione parametrica del piano descritto in forma cartesiana da

$$\pi\colon z = 7$$

e scrivere due vettori che individuano la sua giacitura giac_π.

Risoluzione. Osserviamo che z è *fissato*, mentre x e y sono liberi. Possiamo scegliere come parametri liberi s e t e porre:

$$x = s\,, y = t \qquad s, t \in \mathbb{R}\,;$$

otteniamo

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 7 \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}\,,$$

da cui ricaviamo $\text{giac}_\pi = \{\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}\}$, cioè π è parallelo al piano coordinato xOy.

Risposta: $\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 7 \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R};\ \text{giac}_\pi = \{\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}\}.$

Esercizio 1.10. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Fornire una rappresentazione cartesiana del piano descritto in forma parametrica da

$$\pi\colon \begin{cases} x = 2 - t + s \\ y = 3 + t - 2s \\ z = 7 - 4t + s\,, \end{cases}$$

e individuare un vettore $\boldsymbol{n}$ ortogonale a π.

Risoluzione. Ricaviamo t dalla prima equazione $t = 2 + s - x$ e lo sostituiamo nella seconda equazione

$$y = 3 + (2 + s - x) - 2s = 5 - s - x\,;$$

quindi ricaviamo $s = 5 - x - y$ che può essereusato nell'equazione per t:

$$t = 2 + s - x = 2 + (5 - x - y) - x = 7 - 2x - y\,.$$

Sostituendo t e s così ottenuti nella terza equazione parametrica abbiamo

$$z = 7 - 4(7 - 2x - y) + (5 - x - y) = 7 - 28 + 8x + 4y + 5 - x - y = -16 + 7x + 3y\,,$$

ossia

$$\pi\colon 7x + 3y - z - 16 = 0\,, \tag{1.1}$$

da cui ricaviamo immediatamente le coordinate di un vettore normale al piano

$$[\boldsymbol{n}] = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo verificare il risultato nella seguente maniera; scriviamo l'equazione parametrica del piano π in forma vettoriale:

$$P \in \pi \iff P = P_0 + t\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w}\,,$$

con $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{v}] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $[\boldsymbol{w}] = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Osserviamo che le coordinate di P_0 soddisfano l'equazione cartesiana del piano Equazione 1.1:

$$7 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot 7 - 16 = 14 + 9 - 23 = 0\,;$$

inoltre le coordinate di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ soddisfano l'equazione omogenea del piano π' parallelo a π e passante per l'origine $7x + 3y - z = 0$:

$$\begin{aligned} 7(-1) + 3 \cdot 1 - (-4) = -7 + 3 + 4 = 0 &\qquad \text{per } \boldsymbol{v} \\ 7 \cdot 1 + 3(-2) - (1) = 7 - 6 - 1 = 0 &\qquad \text{per } \boldsymbol{w}\,. \end{aligned}$$

Risposta: $\pi\colon 7x + 3y - z - 16 = 0$, $\boldsymbol{n} = 7\hat{\boldsymbol{\imath}} + 3\hat{\boldsymbol{\jmath}} - \hat{\boldsymbol{k}}$.

Esercizio 1.11. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Fornire una rappresentazione cartesiana del piano descritto in forma parametrica da

$$\pi\colon \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 3 + 2s \\ z = 1 + t + s\,, \end{cases}$$

e individuare un vettore $\boldsymbol{n}$ ortogonale a π.

Risoluzione. Ricaviamo $s = x - 2$ dalla prima equazione parametrica e lo sostituiamo nella seconda: $y = 3 + 2(x - 2) = 2x - 1$, ossia $2x - y - 1 = 0$; osserviamo immediatamente che quest'ultima *non* contiene più i parametri, quindi è già l'equazione cartesiana cercata.

Infatti, se anche sostituissimo s nella terza equazione parametrica, otterremmo

$$z = 1 + t + x - 2 = (x - 1) + t\,,$$

ma t è un parametro libero, quindi per qualunque valore di x che corrisponda alla prima coordinata di un punto di π, z può assumere qualunque valore, ossia *non deve comparire nell'equazione cartesiana*. Un vettore normale al piano ha coordinate $[\boldsymbol{n}] = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Risposta: $\pi\colon 2x - y - 1 = 0$; $\boldsymbol{n} = 2\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}}$.

Esercizio 1.12. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Fornire una rappresentazione cartesiana del piano descritto in forma parametrica da

$$\pi\colon \begin{cases} x = 2 + s - t \\ y = 5 \\ z = 3 + s + 2t\,, \end{cases}$$

e individuare un vettore $\boldsymbol{n}$ ortogonale a π.

Risposta: Osserviamo immediatamente che y *è fissata*; l'equazione $y = 5$ descrive quindi il piano π, e un vettore normale ha coordinate $[\boldsymbol{n}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ossia $\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{\jmath}}$.

Esercizio 1.13. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Considerare i seguenti punti:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la distanza $d(A, B)$; fornire una rappresentazione cartesiana e una parametrica della retta $r = AB$.

Risposta: $d(A,B)=\sqrt{3}$; $\quad r\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-t\\-t\\1-t\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R},\quad \begin{cases}x-y=2\\x+z=3.\end{cases}$

Esercizio 1.14. Sia $\mathcal{R}(O,\hat{\boldsymbol{\imath}},\hat{\boldsymbol{\jmath}},\hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Considerare i seguenti punti:

$$A=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Calcolare le distanze $d(A,B)$, $d(A,C)$, $d(B,C)$; fornire una rappresentazione cartesiana e una parametrica del piano π contenente A, B e C, e calcolare la distanza di π da O.

Risposta: $d(A,B)$, $d(A,C)$, $d(B,C)=\sqrt{2}$;
$\pi\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\alpha\\1-\beta\\\alpha+\beta\end{pmatrix},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},\Longrightarrow x+y+z=2;\quad d(\pi,O)=\frac{2}{\sqrt{3}}.$

Esercizio 1.15. Sia $\mathcal{R}(O,\hat{\boldsymbol{\imath}},\hat{\boldsymbol{\jmath}},\hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Considerare i seguenti punti:

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

e le rette individuate da tutte le coppie di punti.

(a) I punti sono complanari?
(b) Quali delle rette passano per l'origine?
(c) Calcolare le distanze fra tutte le coppie di punti.
(d) Calcolare l'area $\mathcal{A}$ del triangolo ACD.
(e) Se i punti sono complanari, calcolare l'area $\mathcal{A}_q$ del quadrilatero $ABCD$, altrimenti calcolare il volume $\mathcal{V}$ del tetraedro aventi per vertici i punti, e fornire una rappresentazione cartesiana dei 4 piani contenenti le facce del tetraedro.

Risposta: (a): no; (b): AC; (c): $d(A,B)=3$, $d(A,C)=\sqrt{6}$, $d(A,D)=\sqrt{6}$, $d(B,C)=5$, $d(B,D)=\sqrt{5}$, $d(C,D)=\sqrt{22}$; (d): $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\sqrt{22}$; (e): (tetraedro) $\mathcal{V}=\frac{7}{6}$;
$\pi(A,B,C)\colon 2x-3y-4z=0,\quad \pi(A,C,D)\colon 3x-y+z=0,$
$\pi(A,B,D)\colon 2x+4y+3z=7,\quad \pi(B,C,D)\colon 3x+6y+8z=14.$

Esercizio 1.16. Sia $\mathcal{R}(O,\hat{\boldsymbol{\imath}},\hat{\boldsymbol{\jmath}},\hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Considerare i seguenti punti:

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix},$$

e le rette individuate da tutte le coppie di punti.

(a) Determinare le direzioni delle rette.
(b) Quali delle rette passano per l'origine?
(c) Calcolare le distanze fra tutte le coppie di punti.
(d) I punti sono complanari? Qualificare il quadrilatero $ABCD$ e calcolarne l'area $\mathcal{A}$.

Risposta: (a): $[\boldsymbol{d}_{AB}] = [\boldsymbol{d}_{DC}] = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{d}_{AD}] = [\boldsymbol{d}_{BC}] = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{d}_{AC}] = \begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{d}_{BD}] = \begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}$; (b): nessuna; (c): $d(A,B) = d(C,D) = \sqrt{3}$, $d(A,D) = d(B,C) = \sqrt{26}$, $d(A,C) = d(B,D) = \sqrt{29}$; (d): sì, rettangolo, $\mathcal{A} = \sqrt{3}\sqrt{26} = \sqrt{78}$.

Esercizio 1.17. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio. Considerare i seguenti punti:

$$A = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

e le rette individuate da tutte le coppie di punti.

(a) Determinare le direzioni delle rette.
(b) Quali delle rette sono parallele?
(c) Calcolare le distanze fra tutte le coppie di punti.
(d) I punti sono complanari? Qualificare il quadrilatero $ABCD$ e calcolarne l'area $\mathcal{A}$.

Risposta: (a): $[\boldsymbol{d}_{AB}] = [\boldsymbol{d}_{CD}] = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{d}_{AC}] = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{d}_{AD}] = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{d}_{BC}] = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$, $[\boldsymbol{d}_{BD}] = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$; (b): AB e CD; (c): $d(A,B) = 2\sqrt{6}$, $d(A,C) = 3$, $d(A,D) = 1$, $d(B,C) = \sqrt{5}$, $d(B,D) = \sqrt{21}$, $d(C,D) = \sqrt{6}$; (d): sì, trapezio scaleno, $\mathcal{A} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

Esercizio 1.18. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta r passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$.
(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per $P_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$.
(c) Calcolare la distanza di $P_3 = \begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix}$ da π.
(d) Detta Q l'intersezione fra r e π calcolare il prodotto scalare fra i vettori $\overrightarrow{QP_0}$ e $\overrightarrow{QP_2}$.
(e) Calcolare le coordinate di Q e la distanza di P_2 da r.

Risposta:

(a) $r\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4t+3\\-3t+3\\-4t+3\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$; $\quad \begin{cases} x - z = 0 \\ 4y - 3z - 3 = 0; \end{cases}$
(b) $\pi\colon 4x + 3y + 4z + 2 = 0$;
(c) $\sqrt{41}$;
(d) 0;
(e) $Q \equiv (-17/41, 18/41, -17/41)$; $d(P_2, r) = d(P_2, Q) = 2\sqrt{\frac{114}{41}}$.

Esercizio 1.19. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica del piano che ha equazione cartesiana $\pi\colon x - 2y + 2z + 1 = 0$.
(b) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r ottenuta intersecando π con il piano di equazione $y = 2$.
(c) Determinare una rappresentazione cartesiana per la retta s che è parallela ad r e passante per $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(d) Calcolare la distanza di $P_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ da π.

Risposta:

(a) $\pi\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R};$
(b) $r\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R};$
(c) $s\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ p \in \mathbb{R};$
(d) 9.

Esercizio 1.20. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta s passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad s e passante per $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
(c) Detta P_3 l'intersezione fra s e π calcolare l'angolo fra i vettori $\overrightarrow{P_3P_0}$ e $\overrightarrow{P_3P_2}$.
(d) Determinare le coordinate di P_3 e la distanza di r da P_2.
(e) Calcolare le distanza di π da P_0, P_1 e l'origine O.

Risposta:

(a) $r\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \\ -2t+1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}; \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z - 3 = 0; \end{cases}$
(b) $\pi\colon x + y - 2z - 9 = 0;$
(c) $\pi/2;$
(d) $P_3 \equiv (5/2, 5/2, -2)$, $d(P_2, r) = d(P_2, P_3) = \frac{\sqrt{14}}{2};$
(c) $d(\pi, P_0) = \frac{3}{2}\sqrt{6}$, $d(\pi, P_1) = \frac{1}{2}\sqrt{6}$, $d(\pi, O) = \frac{3}{2}\sqrt{6}$..

Esercizio 1.21. Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica del piano che ha equazione cartesiana $\pi\colon x + 3y - 2z + 1 = 0$.
(b) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r ottenuta intersecando π con il piano di equazione $z = 2$.

(c) Determinare una rappresentazione cartesiana per la retta s che è parallela ad r e passante per $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) Calcolare la distanza di $P_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ da π.

Risposta:

(a) $\pi\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$

(b) $r\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$

(c) $s\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R};$ $\qquad \begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$

(d) $d(\pi, P_1) = 2\sqrt{14}$

CAPITOLO 2

Spazi vettoriali

1. Spazi vettoriali

1.1. Spazi vettoriali astratti.

Esercizio 2.1. Consideriamo il seguente insieme V:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+ \right\},$$

ossia l'insieme delle $n-$uple contenenti solo numeri reali strettamente positivi.

Definiamo in V un'operazione interna di addizione e una moltiplicazione per uno scalare definite dalla seguenti regole. Per ogni copppia di elementi di V

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

la somma dei due elementi è

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cdot u_1 \\ v_2 \cdot u_2 \\ \vdots \\ v_n \cdot u_n \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

ossia, per ogni componente della somma si calcola *il prodotto* delle componenti corrispondenti; per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni elemento $\boldsymbol{v} \in V$, il prodotto per uno scalare è

$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_1)^\lambda \\ (v_2)^\lambda \\ \vdots \\ (v_n)^\lambda \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

ossia, ogni componente del prodotto si ottiene elevando al componente corrispondente componente del vettore alla potenza reale λ.

Mostrare che V è uno spazio vettoriale reale con le operazioni introdotte.

Risoluzione. *scrivere*

2. Generatori di uno spazio vettoriale

Esercizio 2.2. Quali delle seguenti liste $\mathcal{S}_i = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ sono generatori di $\mathbb{R}^3$?

(a) $\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$;

(b) $\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$;

(c) $\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$;

(d) $\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$;

(e) $\mathcal{S}_4 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$;

(f) $\mathcal{S}_5 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$;

(g) $\mathcal{S}_6 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$.

(h) $\mathcal{S}_7 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$;

(i) $\mathcal{S}_8 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \right\}$;

(j) $\mathcal{S}_9 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \right\}$;

(k) $\mathcal{S}_{10} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} \right\}$;

Risposta: (b), (d), (e), (f), (h), (k).

Esercizio 2.3. Quali delle seguenti liste $\mathcal{S}_i = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ sono generatori di $\mathbb{R}^4$?

(a) $\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$;

(b) $\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$;

(c) $\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix} \right\}$;

(d) $\mathcal{S}_4 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$;

(e) $\mathcal{S}_5 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$;

Risposta: (a), (b).

3. Indipendenza lineare

Esercizio 2.4. Quali fra le seguenti sono liste di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^2$?

(a) $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\}$;

(b) $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \right\}$;

(c) $L_3 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \right\}$;

(d) $L_4 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\}$;

(e) $L_5 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \right\}$;

(f) $L_6 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\}$;

Risposta: (a), (b).

Esercizio 2.5. Quali fra le seguenti sono liste di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$?

(a) $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\}$;

(b) $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$;

(c) $L_3 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$;

(d) $L_4 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$;

(e) $L_5 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$;

(f) $L_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$;

(g) $L_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$;

(h) $L_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Risposta: (a), (c), (f).

Esercizio 2.6. Quali fra le seguenti sono liste di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4$?

(a) $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$;

(b) $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$;

(c) $L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$;

(d) $L_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$;

(e) $L_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$;

(f) $L_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$;

(g) $L_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$;

Risposta: (b), (d), (e), (g).

Esercizio 2.7. Quali fra le seguenti sono liste di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^5$?

(a) $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$;

(b) $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$;

Risposta: (b).

4. Basi

4.1. Basi di sottospazi vettoriali.

Esercizio 2.8. Sia $S_i = \mathrm{Span}(\mathcal{S}_i) = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$, $i = 0, \ldots, 10$ il sottospazio generato da ognuna delle liste presentate nell'Esercizio 2.2.

Mediante algoritmo di estrazione, determinare una base per ciascuno dei sottospazi S_i, e, in conseguenza a ciò, determinarne la dimensione corrispondente.

Risposta: Applicando l'algoritmo *in avanti*:

(a) $\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \mathcal{S}_0 = 2;$

(b) $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \mathcal{S}_1 = 3;$

(c) $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \mathcal{S}_2 = 2;$

(d) $\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \mathcal{S}_3 = 3;$

(e) $\mathcal{B}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \mathcal{S}_4 = 3;$

(f) $\mathcal{B}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \mathcal{S}_5 = 3;$

(g) $\mathcal{B}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \mathcal{S}_6 = 2.$

(h) $\mathcal{B}_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \mathcal{S}_7 = 3;$

(i) $\mathcal{B}_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \mathcal{S}_8 = 2;$

(j) $\mathcal{B}_9 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \mathcal{S}_9 = 2;$

(k) $\mathcal{B}_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \mathcal{S}_{10} = 3;$

CAPITOLO 3

Matrici

1. Lo spazio delle matrici $k \times n$

Esercizio 3.1. Considerare il sottoinsieme $S_0(2)$ delle matrici quadrate di ordine 2×2 contenente matrici in cui la somma degli elementi sulla diagonale (*traccia della matrice)* sia nulla:

$$S_0(2) = \{A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid \operatorname{tr} A := a_{1,1} + a_{2,2} = 0\}\,. \tag{3.1}$$

Mostrare che $S_0(2)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$; costruire un insieme di generatori di $S_0(2)$ e determinarne una base mediante algoritmo di estrazione, se necessario. In seguito a ciò, individuare la dimensione di $S_0(2)$.

Risposta: Base di $S_0(2)$: $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$; $\dim S_0(2) = 3$.

2. Moltiplicazione tra matrici

2.1. Moltiplicazione matrice-vettore.

Esercizio 3.2. Considerare la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$; e i seguenti vettori:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Calcolare i seguenti prodotti fra A e i vettori indicati:

(a) $A\boldsymbol{v}_1$;
(b) $A\boldsymbol{v}_2$;
(c) $A\boldsymbol{v}_3$;
(d) $A\boldsymbol{v}_4$;
(e) $A(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3)$.

Risposta: (a): $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$; (b): $\begin{pmatrix}-1\\ -4\end{pmatrix}$; (c): $\begin{pmatrix}0\\ 5\end{pmatrix}$; (d): $\begin{pmatrix}8\\ 7\end{pmatrix}$; (e): $\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$.

Esercizio 3.3. Verificare che il risultato del punto ((e)) nell'Esercizio 3.2 si può ottenere anche applicando la proprietà distribuiva, ossia calcolando $(A\boldsymbol{v}_2) + (A\boldsymbol{v}_3)$.

2.2. Prodotto tra matrici.

3. Il prodotto tra matrici quadrate e l'invertibilità

3.1. Prodotto tra matrici quadrate.

3.2. Potenze di una matrice quadrata.

3.3. Invertibilità di una matrice quadrata.

Esercizio 3.4. Considerare le seguenti matrici quadrate di ordine 2; stabilire se le colonne della matrice sono linearmente indipendenti.

In caso affermativo, determinare la matrice inversa costruendo le rappresentazioni dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$ sulla base $\mathcal{B} = \{A^1, A^2\}$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Risposta: (a): $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; (b): $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (d): $\begin{pmatrix} -1/2 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$; (e): $\begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3.5. Considerare le seguenti matrici quadrate di ordine 3; stabilire se le colonne della matrice sono linearmente indipendenti.

In caso affermativo, determinare la matrice inversa costruendo le rappresentazioni dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sulla base $\mathcal{B} = \{A^1, A^2, A^3\}$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Risposta: (a): $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b): $\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; (c): $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (d): $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; (e): $\begin{pmatrix} 1/8 & 1/2 & 3/8 \\ 3/8 & -1/2 & 1/8 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$, (g): $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/3 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$,

ESERCIZIO 3.6. Considerare le seguenti matrici quadrate di ordine 4; stabilire se le colonne della matrice sono linearmente indipendenti.

In caso affermativo, determinare la matrice inversa costruendo le rappresentazioni dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ sulla base $\mathcal{B} = \{A^1, \dots, A^4\}$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Risposta: (a): $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, (c): $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 7/2 & 1/2 & -5/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

4. Cambiamenti di base

4.1. Calcolo delle coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^n$ rispetto ad una base qualsiasi.

5. L'operazione di trasposizione

5.1. Trasposta di una matrice.

5.2. Matrici reali simmetriche.

6. Il determinante

6.1. Determinante di matrici triangolari.

6.2. La formula di Binet.

6.3. Calcolo dell'inversa con la formula di Cramer.

6.4. Utilizzo delle proprietà del determinante per il suo calcolo.

Esercizio 3.7. Calcolare i determinanti delle matrici dell'Esercizio 3.4.

Risposta: (a): $\det A = -1$, (b): $\det B = 1$, (c): $\det C = 0$, (d): $\det D = -3$, (e): $\det E = 4$, (f): $\det F = 0$.

Esercizio 3.8. Calcolare i determinanti delle matrici dell'Esercizio 3.5.

Risposta: (a): $\det A = 1$, (b): $\det B = -2$, (c): $\det C = 1$, (d): $\det D = 1$, (e): $\det E = 8$, (f): $\det F = 0$, (g): $\det G = -6$.

Esercizio 3.9. Calcolare i determinanti delle matrici dell'Esercizio 3.6.

7. Il rango di una matrice

7.1. Rango e minori di una matrice.

7.2. Rango di matrici con parametri.

CAPITOLO 4

Sistemi lineari

1. Esercizi

Esercizio 4.1. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
Calcolare la dimensione di $S := \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : AX = \mathbf{0}\}$ e trovarne una base.

Risposta: $\operatorname{rg} A = 2$, $\dim S = 2$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 - 2x_4 \\ -x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$.
Una base è data da $\left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 4.2. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Calcolare la dimensione di $S := \{X \in \mathbb{R}^4 \mid AX = \mathbf{0}\}$ e trovarne una base.

Risposta: $\operatorname{rg} A = 2$, $\dim S = 2$; una base è data da $\left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 4.3. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calcolare la dimensione di $S := \{X \in \mathbb{R}^4 \mid AX = \mathbf{0}\}$ e trovarne una base.

Risposta: $\operatorname{rg} A = 3$, $\dim S = 1$. Una base è data da $\left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 4.4. Come per Esercizio 4.3, con
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risposta: $\operatorname{rg} A = 3$, $\dim S = 1$. Una base è data da $\left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$.

ESERCIZIO 4.5. Consideriamo i seguenti vettori

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Poniamo $V := \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$, $W := \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$. Calcolare la dimensione di $V \cap W$ e di $V + W$.

RISOLUZIONE. Applicando il metodo di riduzione a scala di Gauss alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

si trova $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid z - y + 2x = t = 0 \}$. Dunque $V \cap W$ ha dimensione 1 ed è generato da $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per la formula di Grassmann $V + W$ ha dimensione 3 e una sua base è data $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$.

ESERCIZIO 4.6. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Studiare il sistema lineare non omogeneo $Ax = b$.

Risposta: Le soluzioni formano una retta affine (cioè un sottospazio affine di dimensione 1). Indichiamo con L lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato: $L := \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : AX = 0\}$. Allora $L = \operatorname{Span}(\boldsymbol{v})$ con $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $S = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + L$.

ESERCIZIO 4.7. Siano $A^1, A^2, A^3 A^4$ le colonne della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia $W = \operatorname{Span}(A^1, \ldots, A^4\} \subset \mathbb{R}^4$. Determinare una base di W.

Risoluzione. $\{A^1, A^2, A^3, A^4\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$. Applicando la riduzione a scala alla matrice A otteniamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = 3$. Inoltre le colonne $\{B^1, B^3, B^4\}$ sono linearmente indipendenti, quindi la matrice $(B^1|B^3|B^4)$ ha rango 3. Quindi anche la matrice $(A^1|A^3|A^4)$ ha rango 3, per cui $\{A^1, A^3, A^4\}$ è una base di W.

Esercizio 4.8. Sia

$$V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Calcolare dimensione, equazioni cartesiane ed una base per V. Sia $U = \{x_4 = 0\}$. Calcolare $\dim U \cap V$ e trovarne una base.

Risoluzione. Con il metodo di Gauss otteniamo $V = \{x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ e $\dim V = 3$. Una base di V è data per esempio dal primo vettore e dagli ultimi due. La dimensione di $U \cap V$ è 2 e una base è data da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Completare a una base di U, ad una base di V e ad una base di $U + V$.