L3 Mathématiques
Parcours A 2019–2020

Contrôle Continu n°2

Durée : 3h
Documents, téléphones et appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Question de cours)

1. Définition d'adhérence ?
2.

Exercice 2 (Sur la continuité)
Soient X et Y espaces topologiques.

1. Montrer que toute application $f : X \to Y$ est continue si X est muni de la topologie discrète.
2. Montrer que toute application $f : X \to Y$ est continue si Y est muni de la topologie grossière.
3. Montrer que les seules applications continues $f : X \to Y$, si Y est muni de la topologie discrète et X de la topologie grossière, sont constantes.
4. Montrer que dans X muni de la topologie grossière toute suite est convergente.
5. Montrer que dans X muni de la topologie discrète les seules suites convergentes sont stationnaires.

Exercice 3 (Espaces métriques produit) Soient (X, d) et (X', d') espaces métriques.

1. Vérifier que $D_\infty : X \times Y \to \mathbb{R}$ définie par $D_\infty((x, x'), (y, y')) = \max\{d(x, x'), d(y, y')\}$ est une distance sur $X \times Y$.
2. Montrer que la topologie définie par D_∞ et la topologie produit sur $X \times Y$ ont les mêmes ouverts.
3. Vérifier que $D_2 : X \times Y \to \mathbb{R}$ définie par $D_2((x, x'), (y, y')) = \sqrt{d(x, x')^2 + d(y, y')^2}$ est une distance sur $X \times Y$.
4. Montrer que $D_\infty(\cdot, \cdot) \leq D_2(\cdot, \cdot) \leq \sqrt{2} D_\infty(\cdot, \cdot)$.
5. En déduire que la topologie définie par D_2 a aussi les mêmes ouverts que la topologie produit.

Soit maintenant (X_k, d_k) une collection dénombrable d'espaces métriques, pour $k \in \mathbb{N}$. On dénote par $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ les éléments du produit infini $\Pi_{k=0}^{+\infty} X_k$.

6. Montrer que

$$D((x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \min\{d_k(x_k, y_k), 1\}$$

définit une distance sur $\Pi_{k=0}^{+\infty} X_k$.

Exercice 4 (Un espace séparable sans bases dénombrables) Soit $H = \{(x, y) : y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ le démi-plan supérieur et soit

$$\mathcal{B} = \{B_0((x, y), r) : r < y\} \cup \{B_0((x, y), y) \cup \{(x, 0)\}\}$$

où B_0 denote la boule ouverte pour la distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base pour une topologie sur H.

On considère maintenant H muni de la topologie engendrée par la base $\mathcal{B}$. On veut montrer que H est séparable mais ne possiède pas de base dénombrable.

2. Montrer que $H \cap \mathbb{Q}^2$ est dense dans H.
3. Montrer que la topologie induite sur la droite $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ est la topologie discrète.
4. Supposons que X soit un espace topologique qui possiède une base dénombrable d'ouverts. Montrer que tout sous-espace $Y \subset X$ possiède une base dénombrable d'ouverts.
5. En déduire que H ne possiède pas de base dénombrable d'ouverts.
6. Est-ce que H est métrisable ?

Exercice 5 (Espaces de suites) Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées et soit $N \colon E \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par

$$N(u) = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Montrer que N définie une norme sur E.

Soit F le sous-espace de E des suites nulles à partir d'un certain rang.

2. Calculer l'intérieur de F.
3. Calculer l'adhérence de F.

Soit G le sous-espace de G des suites réelles convergentes.

4. Calculer l'intérieur de G.
5. Calculer l'adhérence de G.

On veut maintenant montrer que (E, N) est complet. Soit alors $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'élément de E. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on notera $[u_m]_n$ le n-ième terme de la suite $u_m \in E$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $([u_m]_n)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle.
2. Montrer l'existence d'une suite bornée $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $([u_m]_n)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ converge vers v_m quand m tend vers $+\infty$.
3. Montrer que la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers v pour la norme N.
4. En déduire que (E, N) est complet.

Exercice 6 (Topologie p-adique) Soit E un ensemble. Une fonction $d : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dite ultramétrique si d satisfait :

(i) $\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) = d(y, x)$

(ii) $\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$

Distance ultramétrique

1. Montrer que, si d est une ultramétrique, alors d est une distance.
2. Montrer que si $r > 0$ et $x \in E$, pour tout $y \in B(x, r)$, $B(y, r) = B(x, r)$.
3. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de E est de Cauchy si et seulement si la suite $(d(x_n, x_{n+1}))_{n\geq 0}$ tend vers 0.

Topologie p-adique sur $\mathbb{Z}$

Soit p un nombre premier. Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, On définit la **valuation p-adique de** n, notée $\nu_p(n)$, comme le plus grand entier v tel que p^v divise n et on pose

$$\|p\| = p^{-\nu_p(n)}.$$

On pose aussi $\|0\| = 0$ et on définit d: $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ par, pour $n, m \in \mathbb{Z}$, $d(m, n) = \|n - m\|$.

4. Montrer que d définie un distance ultramétrique sur $\mathbb{Z}$.
5. Décrire précisément les boules $B_d(0, 1)$, $B_d(0, 1/p)$, $B_d(1, 1/p)$.

Non-complétude

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 1 + \cdots + p^n$.

6. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{Z}, d)$.
7. On veut montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente dans $(\mathbb{Z}, d)$. Pour cela, on suppose qu'elle converge et on note u sa limite.
   (a) Montrer que la suite $(1 + (p - 1)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, dans $(\mathbb{Z}, d)$, vers $1 + (p - 1)u$.
   (b) En étudiant la valuation p-adique de $1 + (p - 1)u$ aboutir à une contradiction.
8. En déduire que $(\mathbb{Z}, d)$ n'est pas complet.