14. Conséquences et applications de Gauss-Bonnet

<u>Corollaire</u> Si $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface fermée de courbure positive, alors S est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.

Preuve : $\int_S K > 0 \implies \chi(S) > 0 \implies S \simeq \mathbb{S}^2$.

<u>Corollaire</u> Si $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface fermée de genre $g \geq 1$, alors S contient des points de courbure negative.

Preuve: Si $g > 1$, alors $\int_S K < 0 \Rightarrow \exists p \mid K(p) < 0$.

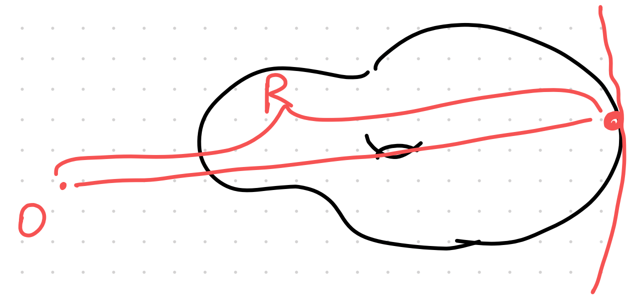
Si $g = 1$, alors $\int K = 0$, donc la preuve découle du lemme suivant.

<u>Lemme</u> Si $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface fermée, alors S contient des points de courbure positive.

Preuve du Lemme.

Soit $R = \max_{p \in S} d(0,p)$.

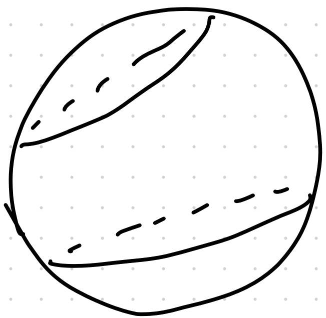
Soit p_0 tel que $d(0,p_0) = R$



Alors la courbure gaussienne de S en p_0 est plus grande ou égale à celle de la sphère de rayon R, qui est positive. $\square$

Corollaire Si $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface fermée de courbure positive, et si γ_1, γ_2 sont deux géodésiques simples fermées, alors elles s'intersectent.

Preuve : $S \simeq \mathbb{S}^2$ si $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$, alors il existe un cylindre C avec $\partial C = \gamma_1 \cup \gamma_2$

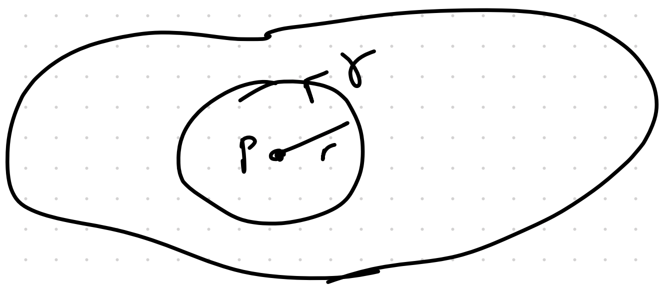


Donc $$\underbrace{\int_C K}_{>0} + \cancel{\int_{\partial C} k} = \chi(C) = 0 \qquad \#$$

Rmq Si $K = 0$, les deux géodésiques peuvent exister

À propos du Theorema Egregium

Soit $p \in S$ et soit, pour $r > 0$, $B(p,r) := \{q \in S \mid d_S(p,q) \leq r\}$



Pour Gauss-Bonnet,

$$\int_{B_r} K + \int_{\gamma} \kappa_\gamma = 2\pi$$

Maintenant,
$$\lim_{r\to 0} \frac{\int_{B_r} K}{\text{Aire}(B_r)} = K(p)$$

Donc
$$K(p) = \lim_{r\to 0} \frac{2\pi - \int_\gamma k_\gamma}{\text{Aire}(B_r)}.$$

En particulier, K est un invariant par Isométries intrinsèques, parce que d_s et k_γ sont déterminés uniquement par la première forme fondamentale !

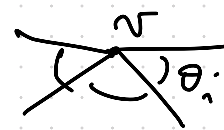
$$\left(|k_\gamma| = \| \nabla_{\gamma'} \gamma' \| \right)$$

Levi-Civita.

Théorème de Descartes sur le défaut d'angle

Soit S un polyhèdre dans $\mathbb{R}^3$. Pour chaque sommet $v \in S$,

soit $\varepsilon_v := 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \theta_i$



Alors
$$\sum_{v \text{ sommet}} \varepsilon_v = 2\pi \chi(S).$$

Rmq En particulier, si S est convexe, alors $S \simeq \mathbb{S}^2$,

donc
$$\sum_{v \text{ sommet}} \varepsilon_v = 4\pi.$$

Preuve : Prenons une triangulation qui inclut tous les arrêts et sommets de S. Pour chaque T_i, $\sum_{j=1}^{3} (\pi - \theta_i^j) = 2\pi$

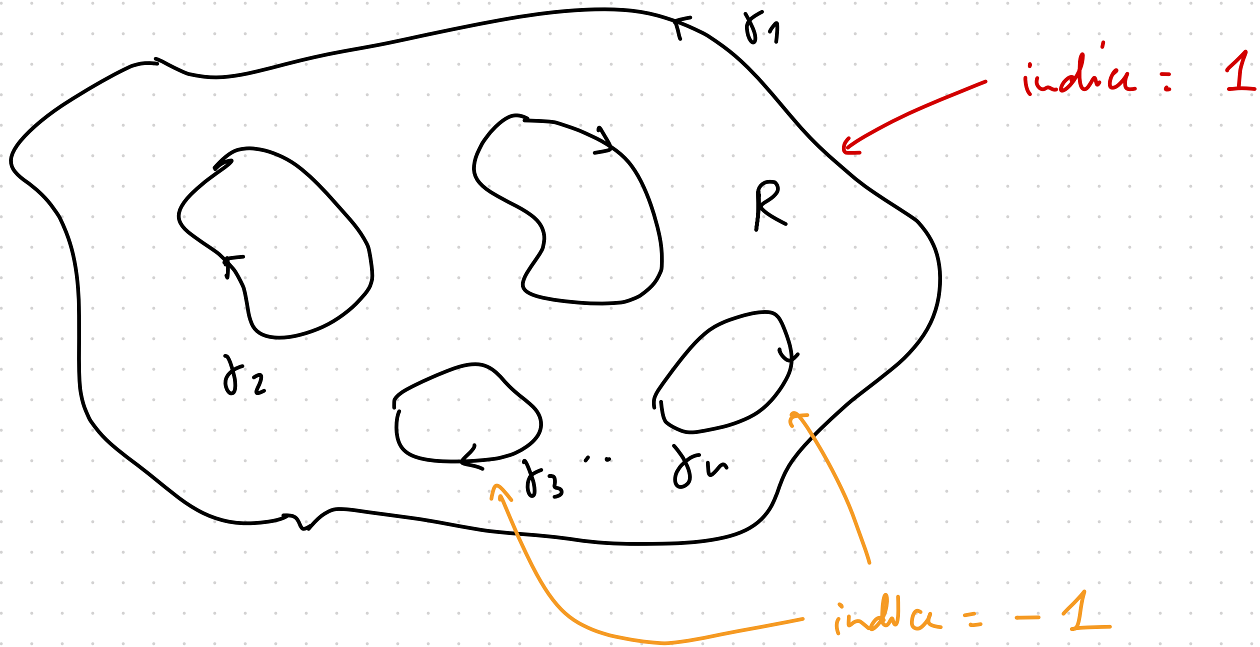
$$\Rightarrow \sum_{i,j} (\pi - \theta_i^j) = 2\pi \, \# \text{faces} \qquad (\Leftarrow \theta_i^1 + \theta_i^2 + \theta_i^3 = \pi)$$

$$\Rightarrow 2\pi \, \# \text{arrêts} - \sum_{i,j} \theta_i^j = 2\pi \, \# \text{faces}$$

$$\Rightarrow 2\pi \, \# \text{arrêts} - 2\pi \, \# \text{sommets} + \left(\sum_{v} \varepsilon_v \right) = 2\pi \, \# \text{faces}$$

$$\Rightarrow \sum_{v} \varepsilon_v = 2\pi \, \chi(S).$$

Proposition Si $R \subset \mathbb{R}^2$ est une région compacte, telle que $R = \overline{(\mathring{R})}$ et ∂R est la réunion de n courbes simples, alors $\chi(R) = 2 - n$



Preuve : il existe une composante connexe de ∂R qui contient toutes les autres dans la composante bornée de son complémentaire.

Soit γ_1 une paramétrisation de cette composante contre le sens de l'horloge, et $\gamma_2, \dots, \gamma_n$ paramétrisations des autres composantes dans le sens de l'horloge.

Alors
$$2\pi\chi(R) = \cancel{\int_R K} + \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \kappa_{\gamma_i} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ind}(\gamma_i)$$
$$= 2\pi\left(1-(n-1)\right) = 2\pi(2-n) \implies \chi(R) = 2-n$$