13. Forme globale de Gauss-Bonnet

<u>Théorème</u> (Gauss-Bonnet, forme globale pour surfaces fermées)
Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface fermée orientable. Alors

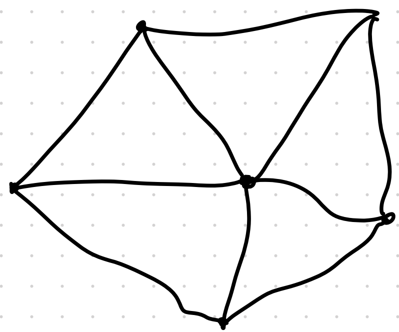
$$\int_S K = 2\pi \chi(S)$$

caractéristique d'Euler

<u>invariant topologique</u> : si S est homéomorphe à S', alors $\chi(S) = \chi(S')$.

Caractéristique d'Euler

Fait ; toute surface S admet une triangulation



Un sous-ensemble $T \subset S$ est un triangle s'il existe un homeomorphisme entre T et un triangle fermée dans $\mathbb{R}^3$.

Une triangulation de S est une collection de triangles $\{T_i\}_{i \in I}$ tels que :

- $S = \bigcup_{i \in I} T_i$
- $\forall i \neq j$, $T_i \cap T_j$ est la réunion (possiblement vide) de sommets et arrêts de T_i et T_j
- $\forall K \subset S$ borné, $\{ i \in I \mid K \cap T_i \neq \phi \}$ est fini.

Donc si S est fermée, alors I est un ensemble fini.

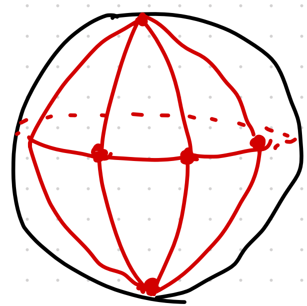
On définit alors, pour une triangulation $\{T_i\}$ de S,

$$\chi(S) := \#\text{faces} - \#\text{arrêts} + \#\text{sommets}.$$

<u>Exemple</u> : $\chi(\text{triangle}) = 1$

$\chi(\text{polygon}) = 1$

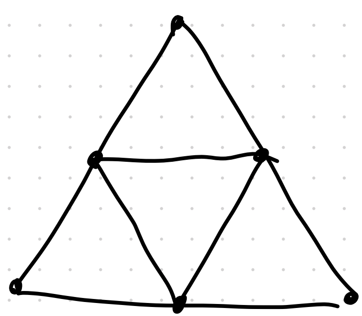
$\chi(S^2) = 2$



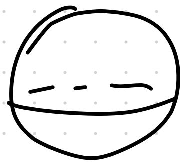
$(n+2) - 3n + 2n = 2$

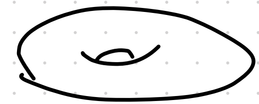
Prop La caractéristique d'Euler ne dépend pas de la triangulation.

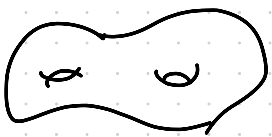
Idée : étant données 2 triangulation différentes, on peut trouver une triangulation qui est une subdivision commune des deux.

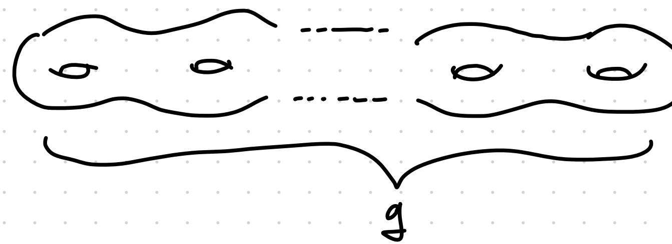


<u>Théorème</u> Toute surface fermée orientable est homéomorphe à la surface S_g de genre g, pour quelque $g \geq 0$.

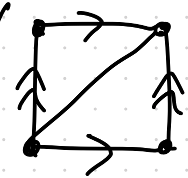
$S_0 = S^2 =$ 

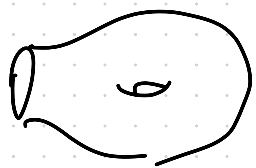
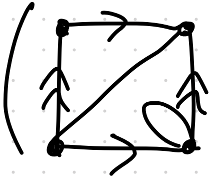
$S_1 = T^2 =$ 

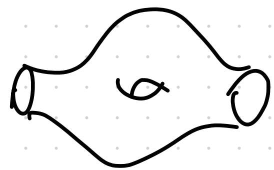
$S_2 =$ 

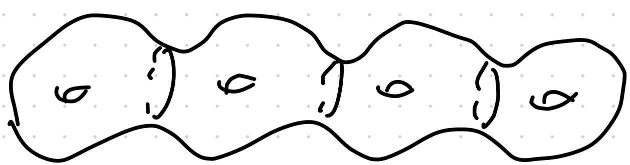
$S_g =$ 

On a $\boxed{\chi(S_g) = 2-2g}$.

En fait, $\chi(T^2) = \chi\Big($  $\Big) = 2-3+1 = 0$

$\chi(T^2 \setminus \text{disque}) = \chi\Big($  $\Big) = \chi\Big($  $\Big) = -1$

$\chi(T^2 \setminus \text{deux disques}) = \chi\Big($  $\Big) = -2$

$\chi(S_g) = \chi\Big($  $\Big)$

$$= -1-1-2(g-2)$$
$$= 2-2g.$$

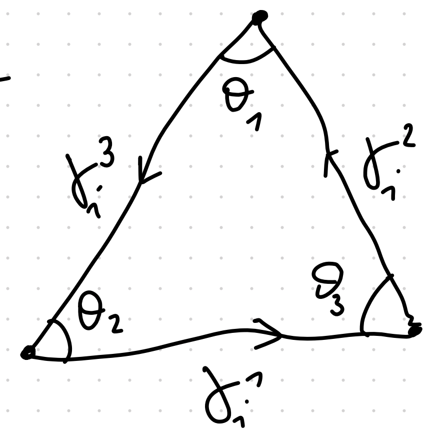
Preuve de la forme globale de Gauss-Bonnet.

Soit $\{T_i\}_{i \in I}$ une triangulation de S.

Quitte à prendre des subdivisions, on peut supposer que chaque T_i est contenu dans l'image d'une carte.

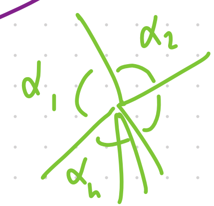
On a donc :

$$\int_{T_i} K + \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_i^j} k_{\gamma_i^j} + \sum_{j=1}^{3} (\pi - \theta_j) = 2\pi$$

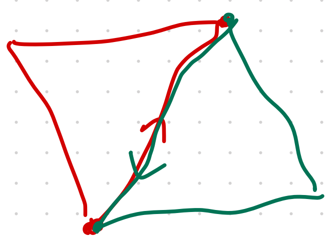


On prend donc la somme sur tous les triangles de la triangulation :

$$\int_S K + \underbrace{\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{3}\int_{\gamma_i^j} K_{\gamma_i^j}}_{=0} + \underbrace{\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{3}(\pi-\theta_i^j)} = 2\pi\ \#\text{faces}$$



$$\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell = 2\pi$$



Donc $\displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{3}(\pi-\theta_i^j)$

$= 2\pi\ \#\text{arrêts} - 2\pi\ \#\text{sommets}$

K_γ change de sign si γ change d'orientation.

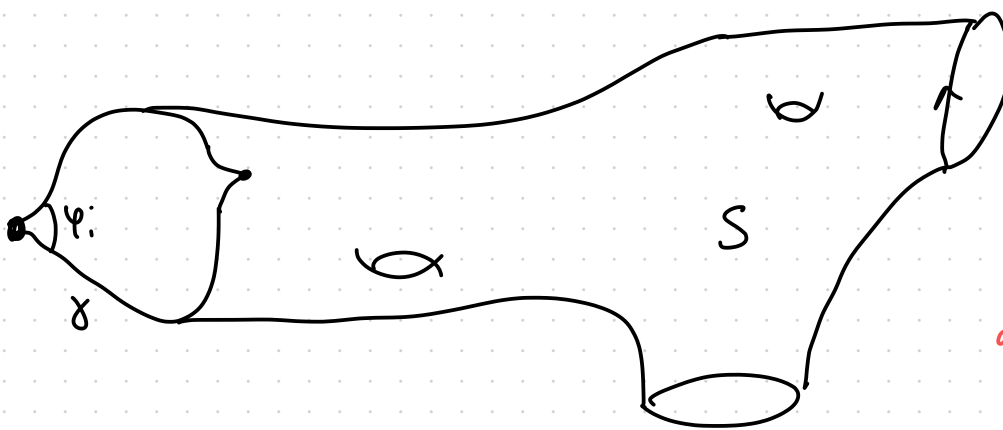
$$\Longrightarrow \boxed{\int_S K = 2\pi(\#\text{faces} - \#\text{arrêts} + \#\text{sommets})}$$

Théorème (Gauss-Bonnet, version globale avec bord)

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte orientable avec bord et coins.

Alors

$$\int_S K + \sum_{\gamma \subset \partial S} \int_\gamma k_\gamma + \sum_i (\pi - \varphi_i) = 2\pi \chi(S)$$



chaque γ est parcourue avec S "à gauche"

<u>Preuve</u> : Soit $\{T_i\}$ une triangulation qui inclut toutes les composantes de bord et les coins de ∂S.

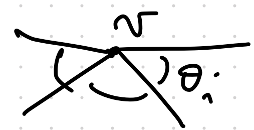
$$\int_{T_i} K + \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_i^j} k_{\gamma_i^j} + \sum_{j=1}^{3} (\pi - \theta_i^j) = 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_S K + \underbrace{\sum_{i\in I} \sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_i^j} k_{\gamma_i^j}}_{\sum_{\gamma \subset \partial S} \int_\gamma k_\gamma} + \underbrace{\sum_{i\in I} \sum_{j=1}^{3} (\pi - \theta_i^j)}_{\sum_{\text{angles au bord}} (\pi - \varphi_i) + \underbrace{\sum_{\text{angles intérieurs}} (\pi - \theta_i^j)}_{= 2\pi \# \text{arrêts} - 2\pi \# \text{sommets}}} = 2\pi \# \text{faces}$$

Théorème de Descartes sur le défaut d'angle

Soit S un polyhèdre dans $\mathbb{R}^3$. Pour chaque sommet $v \in S$,

soit $\varepsilon_v := 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \theta_i$



Alors
$$\sum_{v \text{ sommet}} \varepsilon_v = 2\pi\,\chi(S).$$

En particulier, si S est convexe, alors $S \simeq \mathbb{S}^2$, donc

$$\sum_{v \text{ sommet}} \varepsilon_v = 4\pi.$$

Preuve : Prenons une triangulation qui inclut tous les arrêts et sommets de S. Pour chaque T_i, $\sum_{j=1}^{3} (\pi - \theta_i^j) = 2\pi$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} (\pi - \theta_i^j) = 2\pi \# \text{faces}$$

$$\Rightarrow 2\pi \# \text{arrêts} - \sum_{i,j} \theta_i^j = 2\pi \# \text{faces}$$

$$\Rightarrow 2\pi \# \text{arrêts} - 2\pi \# \text{sommets} + \left(\sum_{v} \varepsilon_v \right) = 2\pi \# \text{faces}$$

$$\Rightarrow \sum_{v} \varepsilon_v = 2\pi \chi(S).$$

Conséquences de Gauss-Bonnet

__Corollaire__ Si $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface fermée de courbure positive, alors S est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.

Preuve : $\displaystyle\int_S K > 0 \implies \chi(S) > 0 \implies S \simeq \mathbb{S}^2$.

<u>Corollaire</u> Si $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface fermée de genre $g \geq 1$, alors S contient des points de courbure negative.

Preuve: Si $g > 1$, alors $\int_S K < 0 \Rightarrow \exists p \mid K(p) < 0$.

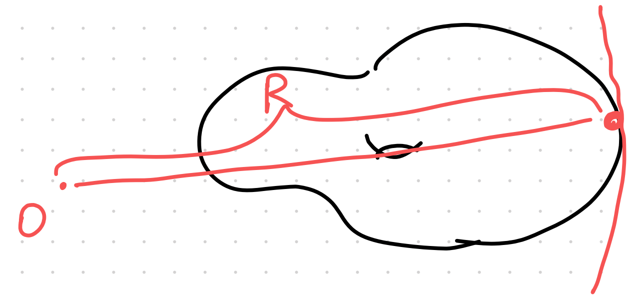
Si $g = 1$, alors $\int K = 0$, donc la preuve découle du lemme suivant.

<u>Lemme</u> Si $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface fermée, alors S contient des points de courbure positive.

Preuve du Lemme.

Soit $R = \max_{p \in S} d(O,p)$.

Soit p_0 tel que $d(O,p_0) = R$



Alors la courbure gaussienne de S en p_0 est plus grande ou égale à celle de la sphère de rayon R, qui est positive. $\square$