6. Première forme fondamentale

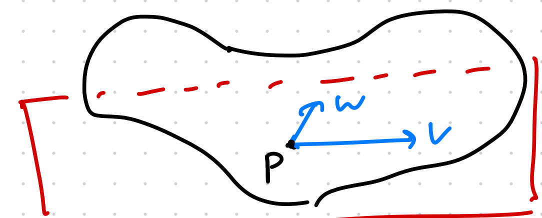
En dimension supérieure, il n'y a pas une notion de paramétrisation par longueur d'arc

$\rightsquigarrow$ pas de paramétrisation "préférée".

Soit S une hypersurface, $p \in S$.

La première forme fondamentale de S en p est le produit scalaire

$$\begin{aligned} T_pS \times T_pS &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, w \rangle \\ & \qquad \text{"} \\ & \quad I(v,w) \end{aligned}$$



On peut décrire la première forme fondamentale par rapport à une carte locale :

$$
\begin{aligned}
F : \Omega &\longrightarrow S \\
x_0 &\longmapsto p
\end{aligned}
$$

$$
dF_{x_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_p S
$$

$I(dF(\cdot), dF(\cdot))$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
I^F(E_i, E_j) = I(dF(E_i), dF(E_j)) &= \langle dF(E_i), dF(E_j) \rangle \\
&= dF(E_i)^t \, dF(E_j)
\end{aligned}
$$

Donc la matrice qui représente la première forme fondamentale est $dF^t \cdot dF \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$.

<u>Rmq</u> • I est invariante par isométries :

si $\hat{S} = AS + c$, $A \in O(n+1)$, $c \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\hat{p} := Ap + c$

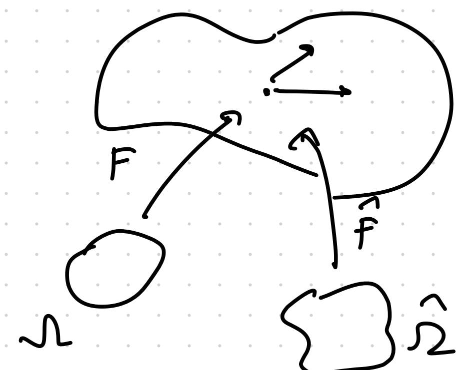
alors $I(\underset{\in T_pS}{v, w}) = \langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle = \hat{I}(\underset{\in T_{\hat{p}}\hat{S}}{Av, Aw})$

• si on change de carte locale pour S,

$$I^{\hat{F}} = d\hat{F}^{\perp} d\hat{F} = L^T (dF^{\perp} dF) L = L^T I^F L$$

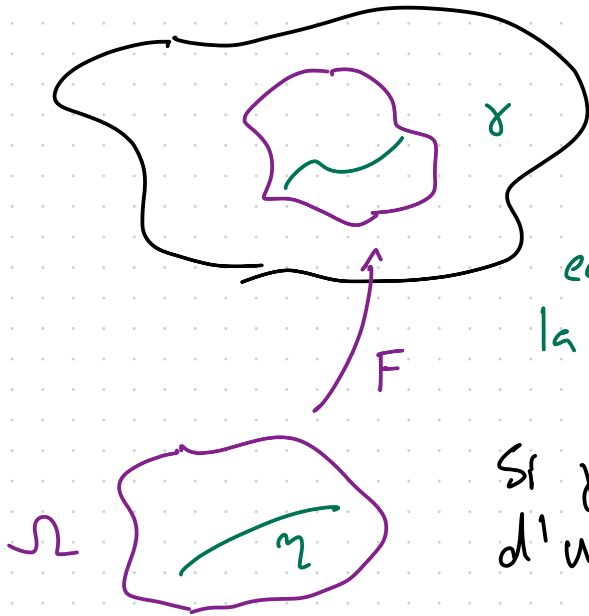
pour $\hat{F} = F \circ (F^{-1} \circ \hat{F})$

$$\longrightarrow \ d\hat{F} = dF \circ (\underbrace{dF^{-1} \circ d\hat{F}}_{= L})$$



La première forme fondamentale permet de calculer les **longueurs des courbes** contenues dans l'hypersurface :

Soit $\eta : I \longrightarrow \Omega$, $\gamma = F \circ \eta : I \longrightarrow S$, $I = (t_0, t_1)$



$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \| \gamma'(t) \| \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{< \gamma'(t), \gamma'(t) >} \, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I^F(\eta'(t), \eta'(t))} \, dt$$

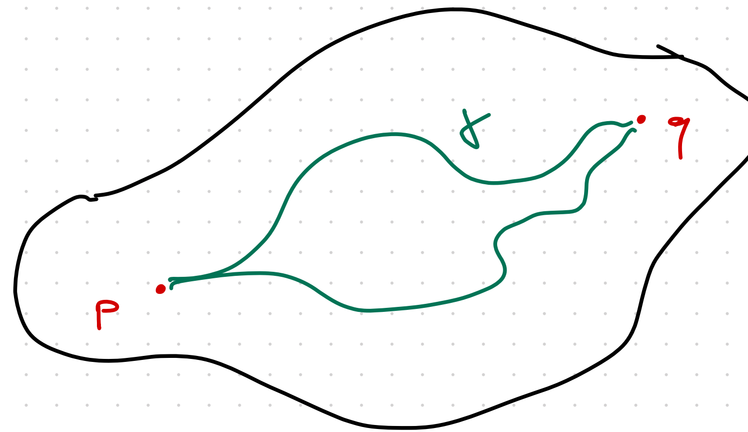
calculable dans la carte locale

Si γ n'est pas contenue dans l'image d'une seule carte, alors on peut diviser I en des sous-intervalles.

On peut alors définir une <u>distance</u> sur S :

$$d^S : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d^S(p,q) = \inf_{\substack{\gamma : [0,1] \to S \\ \gamma(0)=p,\ \gamma(1)=q \\ \gamma \text{ courbe régulière}}} L(\gamma)$$



<u>Rmq</u> Évidemment,

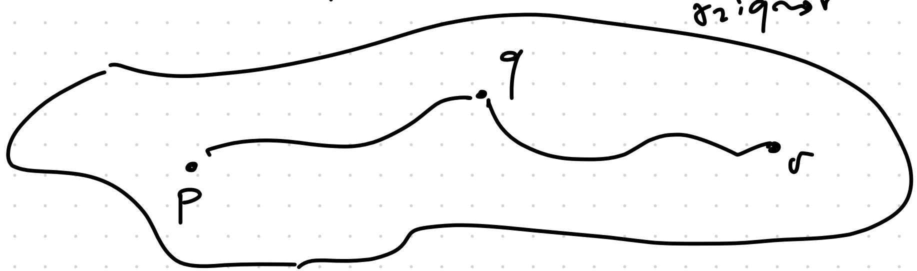
$$d^S(p,q) \geq \| p - q \|$$

d^S définit une structure d'espace métrique sur S :

- $d^S(p,q) = d(q,p)$ parce que, pour tout $\gamma : [0,1] \to S$ courbe regulière, $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=q$, $\hat{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ est une courbe avec $\gamma(0)=q$, $\gamma(1)=p$.

- $d^S(p,q) = 0 \iff p=q$ puisque $d^S(p,q) \geq \|p-q\|$

- $d^S(p,r) = \inf\limits_{\gamma : p \rightsquigarrow r} L(\gamma) \leq \inf\limits_{\substack{\gamma_1 : p \rightsquigarrow q \\ \gamma_2 : q \rightsquigarrow r}} (L(\gamma_1) + L(\gamma_2))$



$$\leq \inf_{\gamma_1 : p \rightsquigarrow q} L(\gamma_1) + \inf_{\gamma_2 : q \rightsquigarrow r} L(\gamma_2)$$

$$= d^S(p,q) + d^S(q,r).$$

On va maintenant étudier les applications $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ qui préservent les distances.

<u>Théorème</u> Soient $S, \hat{S} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ deux hypersurfaces, soit $\varphi : S \longrightarrow \hat{S}$ une bijection.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) φ lisse et $\forall p \in S, \forall v, w \in T_pS, \; \hat{I}(d\varphi(v), d\varphi(w)) = I(v, w)$

ii) φ lisse et $\forall p \in S, \forall v \in T_pS, \; \hat{I}(d\varphi(v), d\varphi(v)) = I(v, v)$

iii) φ lisse et $\forall \gamma : I \to S$ courbe regulière, $L(\varphi \circ \gamma) = L(\gamma)$

iv) $\forall p, q \in S \quad d^{\hat{S}}(\varphi(p), \varphi(q)) = d^{S}(p, q)$

On dit alors que φ est une isométrie.

<u>Rmq</u>

- iv) implique que φ est un homéomorphisme.

  en fait, φ est continue ;

  si $p_n \to p$, $d^S(p_n, p) \to 0$, donc $d^{\hat{S}}(\varphi(p_n), \varphi(p)) \to 0$

  $\Rightarrow \|\varphi(p_n) - \varphi(p)\| \to 0 \Rightarrow \varphi(p_n) \to \varphi(p)$

  et de la même manière φ^{-1} est continue.

- i) et ii) impliquent que $d\varphi$ est inversible,

  en fait, $d\varphi$ est injective :

  $d\varphi(v) = 0 \Rightarrow 0 = I^{\hat{S}}(d\varphi(v), d\varphi(v)) = I^S(v, v)$

  $\Rightarrow v = 0$

  $\Rightarrow d\varphi$ isomorphisme.

Preuve ;

i) $\Rightarrow$ ii) trivial

ii) $\Rightarrow$ i) : $I^{\hat{S}}(d\varphi(v+w), d\varphi(v+w)) = I^{S}(v+w, v+w)$

$$\Rightarrow I^{\hat{S}}(d\varphi(v), d\varphi(v)) + I^{\hat{S}}(d\varphi(w), d\varphi(w)) + 2\, I^{\hat{S}}(d\varphi(v), d\varphi(w))$$

$$= I^{S}(v, w) + I^{S}(w, w) + 2 I^{S}(v, w)$$

$$\Rightarrow I^{\hat{S}}(d\varphi(v), d\varphi(w)) = I^{S}(v, w).$$

ii) $\Rightarrow$ iii) trivial

iii) $\Rightarrow$ ii) Supposons $\exists v \in T_pS$ t.q.

$$\|d\varphi(v)\|^2 = I^{\hat{S}}(d\varphi(v), d\varphi(v)) \neq I^S(v, w) = \|v\|^2$$

alors soit $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ avec $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$

soit $f(t) := \int_0^t \|\gamma'(s)\| ds$, $\hat{f}(t) := \int_0^t \|(\varphi \circ \gamma)'(s)\| ds$

$$f'(0) = \|\gamma'(0)\| = \|v\| \neq \|d\varphi(v)\| = \|(\varphi \circ \gamma)'(0)\| = \hat{f}'(0)$$

donc $f(\delta) \neq f'(\delta)$ pour δ proche de 0

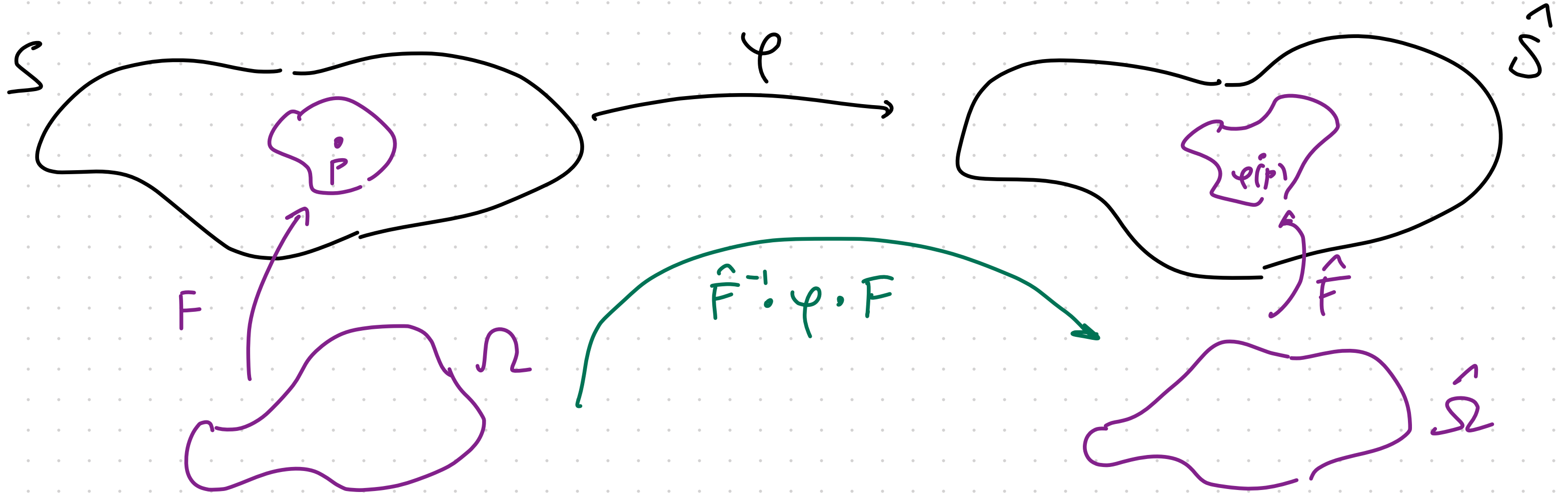
$\Rightarrow$ φ ne préserve pas les longueurs des courbes

iii) $\to$ iv) est trivial

Le fait que iv) soit équivalente à l'une des autres conditions (en particulier, le fait que φ est lisse) est un théorème difficile

(Théorème de Myers-Steenrod)

On peut vérifier que φ est une isométrie en cartes:



φ isométrie $\iff \forall p \in S \ \forall v, w \in T_pS \ \ \langle d\varphi(v), d\varphi(w)\rangle = \langle v, w\rangle$

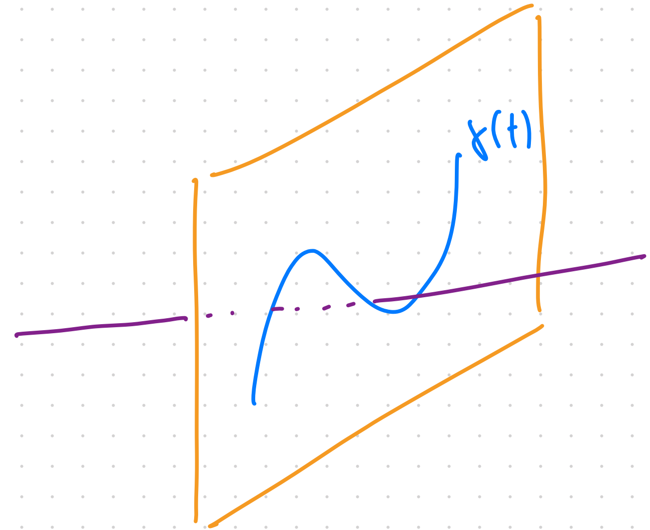
$\iff \forall p \in S$ il existe des cartes $F : \Omega \to S$, $p \in F(\Omega)$, $\hat{F} : \hat{\Omega} \to \hat{S}$, $\varphi(p) \in \hat{F}(\hat{\Omega})$,

t.q. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $I^{\hat{F}}(d(\hat{F}^{-1}\circ\varphi\circ F)(x), d(\hat{F}^{-1}\circ\varphi\circ F)(y)) = I^F(x,y)$

<u>Exemple</u> Soient $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^2$ deux courbes régulières paramétrées par longueur d'arc

Soit $F_i : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

$F_i(u, v) = (\gamma_i(u), v)$



On a

$$dF_i(E_1) = (\gamma_i'(u), 0)$$
$$dF_i(E_2) = (0, 1)$$

Donc

$$I^{F_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } i = 1, 2.$$

L'application $\varphi : S_1 \to S_2$

$\varphi(\gamma_1(u), v) = (\gamma_2(u), v)$

est une isométrie.

L'énoncé du Theorema Egregium

Rappel : on a défini l'opérateur de Weingarten de S

$$B_p : T_pS \longrightarrow T_pS$$

$$B_p(v) = -D_v N = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\gamma(t))$$

où $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^n$ est l'application de Gauss

$\gamma(t)$ courbe régulière contenu dans S

$\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$

On verra que B est auto-adjoint par rapport à la première forme fondamentale, donc diagonalisable.

$$B(p) \sim \begin{pmatrix} \lambda_1(p) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(p) \end{pmatrix}$$

On définit :

- la courbure moyenne $H : S \to \mathbb{R}$ comme $H(p) = \operatorname{tr} B(p)$
$$= \lambda_1(p) + \dots + \lambda_n(p)$$
- la courbure de Gauss-Kronecker $K : S \to \mathbb{R}$ comme $K(p) = \det B(p)$
(ou courbure gaussienne si $n=2$)
$$= \lambda_1(p) \cdots \lambda_n(p)$$
- un point umbilical est un point $p \in S$ tel que
$$B(p) = \lambda \cdot id_{T_pS}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ce sont tous des invariants par isométrie : si $F(x) = Ax + v$, $A \in SO(n+1)$, alors $H_{F(S)}(F(p)) = H_S(p)$, et cetera.

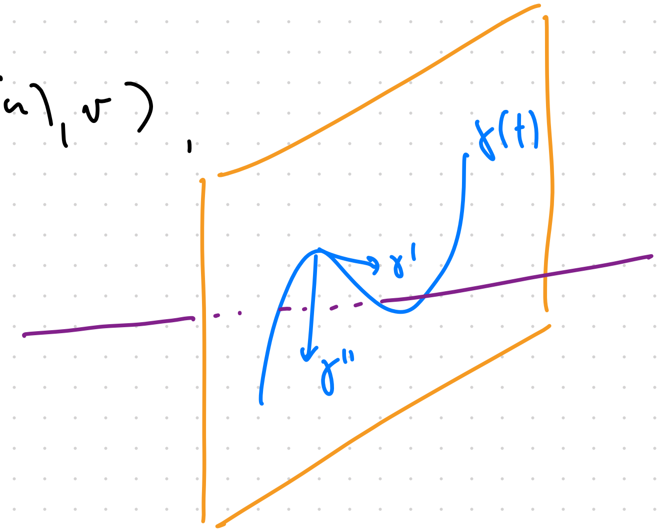
Theorema Egregium de Gauss

Soient S et $\hat{S}$ deux surfaces dans $\mathbb{R}^3$, et soient $k : S \to \mathbb{R}$, $\hat{k} : \hat{S} \to \mathbb{R}$ les courbures gaussiennes. S'il existe une isométrie $\varphi : S \to S'$, alors $\hat{k} \circ \varphi = k$.

"La courbure gaussienne est un invariant par isométries intrinsèques"

Dans l'exemple

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad F(u,v) = (\gamma(u), v),$$



$$N(u,v) = (\gamma''(u), 0)$$

$$B(E_1) = -dF^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial u} N(u,v)\right) =$$

$$= -dF^{-1}(\gamma'''(u), 0) = -\frac{\gamma'''(u)}{\gamma'(u)} E_1$$

$$B(E_2) = -dF^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial v} N(u,v)\right) = -dF^{-1}(0) = 0$$

Donc $B = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma'''}{\gamma'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det B \equiv 0$

Cela ne dépend pas du choix de γ !