9. Theorema Egregium, équations de Gauss-Codazzi

On va maintenant se restraindre à une surface $S \subset \mathbb{R}^3$.

On considère $\Phi : \Omega^{\subset \mathbb{R}^2} \longrightarrow S$ une carte locale.

On dénote $(u,v) \in \Omega$ et :

$$\Phi_u := d\Phi(1,0) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \qquad \Phi_v := d\Phi(0,1) = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

donc $T_{\Phi(u_0,v_0)} S = \mathrm{Vect}\left(\Phi_u(u_0,v_0), \Phi_v(u_0,v_0)\right)$

On a alors

$$I^{\Phi} = \begin{pmatrix} \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle & \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle \\ \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle & \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Maintenant, comme $\mathrm{II}(V,W) = \langle D_V W, N \rangle$,

$$\mathrm{II}^{\Phi} = \begin{pmatrix} \langle \Phi_{uu}, N \rangle & \langle \Phi_{uv}, N \rangle \\ \langle \Phi_{uv}, N \rangle & \langle \Phi_{vv}, N \rangle \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

et donc, comme $\mathrm{II}(V,W) = \mathrm{I}(V, B(W))$,

$$B^{\Phi} = (\mathrm{I}^{\Phi})^{-1} (\mathrm{II}^{\Phi}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$\neq 0$ car I est définie positive

On sait que B est diagonalisable, donc, pour $p \in S$ fixé,

$$B \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \mu \leq \lambda.$$

par rapport à une base orthonormée pour I.

<u>Prop</u> λ et μ sont les maximum et minimum des courbures normales de toutes les courbes régulières dans S passantes par p, paramétrées par longueur d'arc.

<u>Preuve</u> : Soit V, W base orthonormée avec $B(V) = \lambda V$, $B(W) = \mu W$.
Alors si γ est telle que $\gamma(0) = p$, γ' unitaire,

$$\gamma'(0) = (\cos \alpha) V + (\sin \alpha) W$$

On a donc, si $\lambda \neq \mu$

$$k_\gamma^N(p) = \mathrm{II}(\dot\gamma(0), \dot\gamma(0)) = I(B(\dot\gamma(0)), \dot\gamma(0)) =$$

$$= I(B(\cos\alpha V + \sin\alpha W), \cos\alpha V + \sin\alpha W)$$

$$= I(\lambda \cos\alpha V + \mu \sin\alpha W, \cos\alpha V + \sin\alpha W)$$

$$= \lambda \cos^2\alpha + \mu \sin^2\alpha \quad \begin{array}{l} \geq \mu(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \mu \\ \leq \lambda(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \lambda \end{array}$$

$\langle V, W \rangle = 0$

Si $\lambda = \mu$ en p, alors p est un point umbilical,

et alors $B(V) = \lambda V \quad \forall V \in T_p S$.

Theorema Egregium (Gauss, 1827)

Soient $S, \hat{S} \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces. Supposons qu'il existe une isométrie $\varphi : S \to \hat{S}$. Alors $\hat{K}(\varphi(p)) = K(p)$.

courbure gaussienne $K = \det B$

La stratégie de la preuve consiste en montrer que $\det B$ peut être calculé uniquement en fonction de I. Plus précisément, en fonction des coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k.

On fera donc le calcul en une carte locale $\Phi : U \to S$.

Le point de départ est que

$$\underbrace{D_{\Phi_u} D_{\Phi_v} \Phi_v}_{\frac{\partial^2 \Phi_v}{\partial u \partial v}} - \underbrace{D_{\Phi_v} D_{\Phi_u} \Phi_v}_{\frac{\partial^2 \Phi_v}{\partial v \partial u}} = 0$$

Or, on rappelle que

$$D_V W = \nabla_V W + \mathrm{II}(V, W) N$$

$$
\begin{aligned}
0 &= D_{\Phi_u} D_{\Phi_v} \Phi_v - D_{\Phi_v} D_{\Phi_u} \Phi_v = \\
&= D_{\Phi_u}\left(\nabla_{\Phi_v}\Phi_v + \mathrm{II}(\Phi_v, \Phi_v) N\right) - D_{\Phi_v}\left(\nabla_{\Phi_u}\Phi_v + \mathrm{II}(\Phi_u, \Phi_v) N\right) \\
&= \nabla_{\Phi_u}\nabla_{\Phi_v}\Phi_v + \mathrm{II}(\nabla_{\Phi_v}\Phi_v, \Phi_u) N \\
&\qquad + D_{\Phi_u}\mathrm{II}(\Phi_v, \Phi_v) N - \mathrm{II}(\Phi_v, \Phi_v) B(\Phi_u) \\
&\quad - \nabla_{\Phi_v}\nabla_{\Phi_u}\Phi_v - \mathrm{II}(\nabla_{\Phi_u}\Phi_v, \Phi_v) N \\
&\qquad - D_{\Phi_v}\mathrm{II}(\Phi_u, \Phi_v) N + \mathrm{II}(\Phi_u, \Phi_v) B(\Phi_v)
\end{aligned}
$$

partie tangentielle

Donc

$$0 = \langle D_{\Phi_u} D_{\Phi_v} \Phi_v - D_{\Phi_v} D_{\Phi_u} \Phi_v , \Phi_u \rangle \qquad \det \mathrm{II}$$

$$= \langle \nabla_{\Phi_u} \nabla_{\Phi_v} \Phi_v - \nabla_{\Phi_v} \nabla_{\Phi_u} \Phi_v , \Phi_u \rangle$$

$$- \left(\mathrm{II}(\Phi_u, \Phi_u)\, \mathrm{II}(\Phi_v, \Phi_v) - \mathrm{II}(\Phi_u, \Phi_v)^2 \right)$$

Equation de Gauss

$$\Longrightarrow \det B = (\det \mathrm{I})^{-1} \det \mathrm{II} = \frac{\langle \nabla_{\Phi_u} \nabla_{\Phi_v} \Phi_v - \nabla_{\Phi_v} \nabla_{\Phi_u} \Phi_v , \Phi_u \rangle}{\langle \Phi_u, \Phi_u \rangle \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle - \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle^2}$$

Donc si $S, \hat{S}$ sont isométriques, alors φ préserve les connexions de Levi-Civita $\left(\hat{\nabla}_{d\varphi(v)} d\varphi(W) = d\varphi(\nabla_v W) \right)$ et donc $(\det \hat{B})(\varphi(p)) = (\det B)(p)$. $\square$

Si l'on regarde la partie normale, on obtient l'identité

$$\underbrace{(\nabla_{\Phi_u} \mathrm{II})(\Phi_r, \Phi_v)}_{\substack{\shortparallel \\ D_{\Phi_u} \mathrm{II}(\Phi_r, \Phi_v) \\ - \mathrm{II}(\nabla_{\Phi_u} \Phi_r, \Phi_v) - \mathrm{II}(\Phi_r, \nabla_{\Phi_u} \Phi_v)}} = \underbrace{(\nabla_{\Phi_r} \mathrm{II})(\Phi_u, \Phi_v)}_{\substack{\shortparallel \\ D_{\Phi_r} \mathrm{II}(\Phi_u, \Phi_v) \\ - \mathrm{II}(\nabla_{\Phi_r} \Phi_u, \Phi_v) - \mathrm{II}(\Phi_u, \nabla_{\Phi_r} \Phi_v)}}$$

<u>Equation de Codazzi</u>

Théorème fondamental des surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et soient I_0, II_0 deux formes bilinéaires symétriques lisses par rapport à $x_0 \in \Omega$, I définie positive, qui satisfont les équations de Gauss - Codazzi.

Alors pour tout $p \in \Omega$ il existe un voisinage $p \in U \subset \Omega$ et une immersion $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ telle que $I^{\Phi} = I_0$, $II^{\Phi} = II_0$.

De plus, Φ est unique à composition avec une isométrie près

$$x \longmapsto Ax + c, \quad A \in O(3), \ c \in \mathbb{R}^3$$

On va montrer la partie de l'unicité.

Plus précisement :

<u>Prop</u> Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert connexe, soient $F, \hat{F} : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ immersions telles que $I^F = I^{\hat{F}}$ et $II^F = II^{\hat{F}}$ par rapport à des champs vecteurs normaux unitaires $N, \hat{N}$.

Alors il existe $A \in O(n+1)$, $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\hat{F} = A \cdot F + c$.

<u>Preuve</u> : On considère les bases

$$\Big(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)}_{\in T_{F(x)} S}, N(x)\Big) \quad \text{et} \quad \Big(\underbrace{\frac{\partial \hat{F}}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_n}(x)}_{\in T_{\hat{F}(x)} \hat{S}}, \hat{N}(x)\Big) \text{ de } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Il existe $L = L(x) \in GL(n+1)$ envoyant la première base sur la deuxième.

Comme $I^F = I^{\hat{F}}$, on a $\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(x), \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_j}(x) \right\rangle \quad \forall i, j$

de plus, $\left\langle N(x), \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \right\rangle = 0 = \left\langle \hat{N}(x), \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i}(x) \right\rangle \quad \forall i$

Donc $\forall x \in \Omega \quad L(x) \in O(n+1)$

But : on montrera que L est constant.

On aura alors

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\hat{F} - L \cdot F) = \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i} - L \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i \Rightarrow d(\hat{F} - L \cdot F) \equiv 0$$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ t.q. $\hat{F}(x) = L \cdot F(x) + c$

Ω convexe

ce qui terminera la preuve.

Pour montrer que L est constant, on observe :

$$\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i'}\bigg|_{x=x_0} \left(L(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_j'}(x) \right)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_i'}(x_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_j'}(x_0)}_{\text{on verra que } \uparrow = 0} + L(x_0) \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_i' \partial x_j'}(x_0)$$

et

$$\frac{\partial \hat{N}}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i'}\bigg|_{x=x_0} \left(L(x) \cdot N(x) \right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_i'}(x_0) \cdot N(x_0)}_{\text{on verra que } \uparrow = 0} + L(x_0) \cdot \frac{\partial N}{\partial x_i'}(x_0)$$

Or,

$$\frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x_i \partial x_j} = D_{d\hat{F}(E_i)} d\hat{F}(E_j) = \hat{\nabla}_{d\hat{F}(E_i)} d\hat{F}(E_j) + \mathrm{II}^{\hat{F}}(E_i, E_j)\hat{N}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \hat{\Gamma}_{ij}^{k} \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_j} + \mathrm{II}^{\hat{F}}(E_i, E_j)\hat{N}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} L\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) + \mathrm{II}^{F}(E_i, E_j) L(N)$$

$$= L\left[\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial F}{\partial x_j} + \mathrm{II}^{F}(E_i, E_j) N\right]$$

$$= L\left(D_{dF(E_i)} dF(E_j)\right) = L \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$$

Analoguement,

$$\frac{\partial \hat{N}}{\partial x_i} = d\hat{N}(E_i) = -\hat{B}(d\hat{F}(E_i)) = -\hat{B}(L \cdot dF(E_i))$$

$$= -L \cdot B(dF(E_i)) = L \cdot dN(E_i) = L\left(\frac{\partial N}{\partial x_i}\right).$$

Donc $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_0)$ envoit la base $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0), N(x_0)\right)$ sur $(0, \dots, 0)$

$\Longrightarrow$ $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_0)$ est la matrice nulle $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\Longrightarrow$ $L : \Omega \longrightarrow O(n+1)$ est constante. $\square$