4. Équivalence entre les définitions, champs vecteurs

<u>Proposition</u> Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et $p \in S$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $\exists U$ voisinage de p tel que $S \cap U = dF(\Omega)$ pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $F : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ différentiable, immersion injective.

ii) $\exists U$ voisinage de p tel que

$$S \cap U = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ \text{pour } (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \in \Omega \end{array} \right\}$$

pour $i \in \{1, \dots, n+1\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable

iii) $\exists U$ voisinage de p tel que $S \cap U = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid G(x) = 0 \}$ pour $G : U \to \mathbb{R}$ différentiable, $dG \neq 0$ pour tout point dans U.

Remarques :

- Dans i), on demande dF_x injective pour tout $x \in \Omega$, mais il suffit de supposer dF_{x_0} injectif, où $F(x_0) = p$, quitte à réduire Ω.

  (Si dF_{x_0} injectif, dF_x reste injectif sur un voisinage)

- Dans iii), on demande $dG_q \neq 0$ pour tout $q \in U$, mais il suffit de supposer $dG_p \neq 0$, quitte à réduire U

  (si $dG_p \neq 0$, dG_q reste non-nul sur un voisinage)

Preuves de l'équivalence

ii) $\Rightarrow$ i) On prend $F : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$

$$F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) :=$$

$$= (x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

- F est différentiable et injective.

- $dF = \begin{pmatrix} \boxed{I_{i-1}} & \\ * \; * \; * \; * & * \; * \; * \; * \\ & \boxed{I_{i+1}} \end{pmatrix}$ est injective.

ii) $\Rightarrow$ iii) On prend $G : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G(x_1, \dots, x_{n+1}) := x_i - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

est différentiable

On a : $G = 0 \iff x_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$

$\iff (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S \cap U$

et $dG = (\underbrace{* \dots *}_{i-1}, 1, \underbrace{* \dots *}_{n-i+1}) \neq 0.$

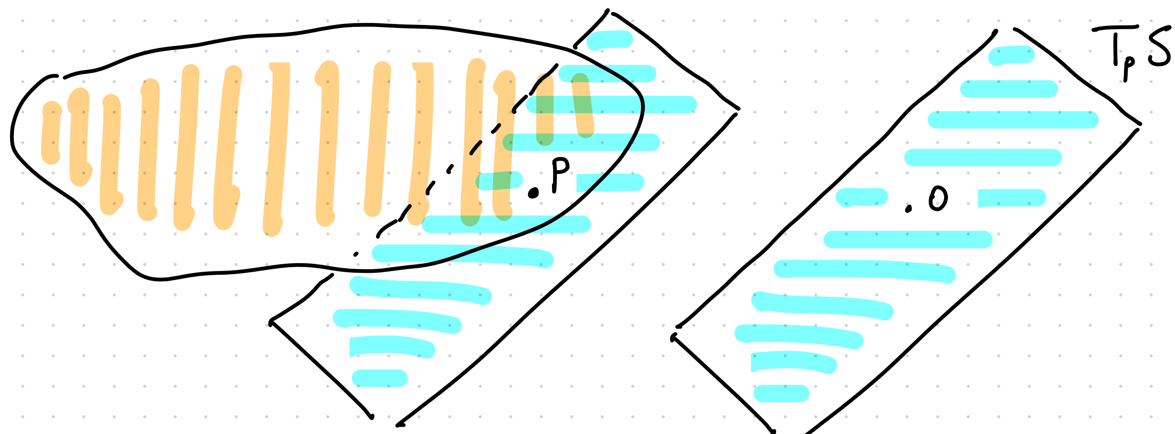
Avant de montrer i) ⇒ ii), on va introduire des notions.

Étant donnée une carte $F: \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ pour une hypersurface S,

- l'espace tangent à S en $p = F(x_0)$ est l'image de dF_{x_0}

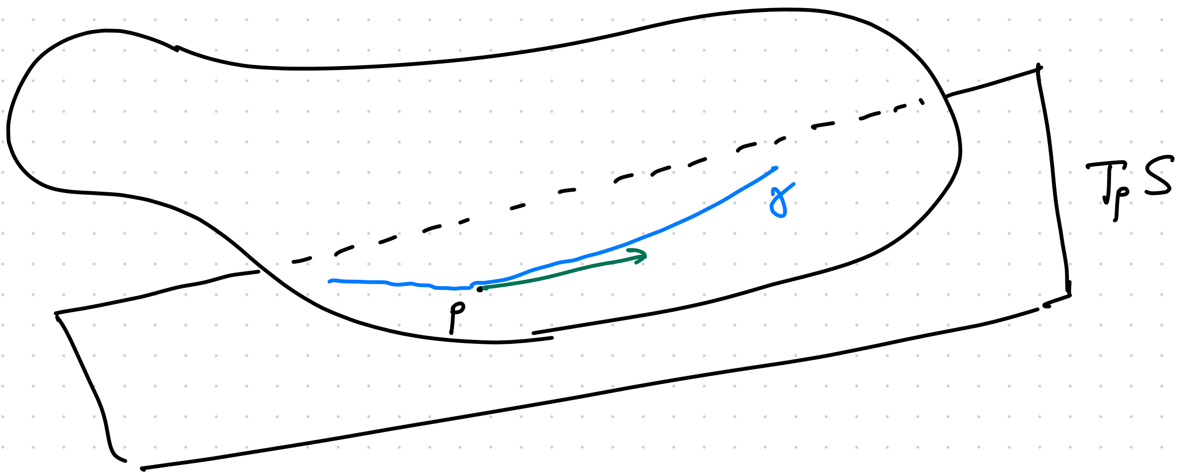
$$T_pS := dF_{x_0}(\mathbb{R}^n)$$

- l'espace tangent affine à S en p est $p + T_pS = \{p + v \mid v \in T_pS\}$



Rmq L'espace tangent $T_p S$ peut aussi être interprété comme

$$T_p S = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+1} \text{ lisse, } \mathrm{Im}(\gamma) \subset S \text{ telle que } \gamma(0) = p \text{ et } \gamma'(0) = v \}$$



Mais par cette définition la structure d'espace vectoriel de $T_p S$ est moins évidente.

Maintenant, soit $\pi_i : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la projection

$$\pi_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

Fixons $p \in S$. Soit $N_p \neq 0$ un vecteur orthogonal à T_pS

i.e. $\langle V, N_p \rangle = 0 \quad \forall V \in T_pS$

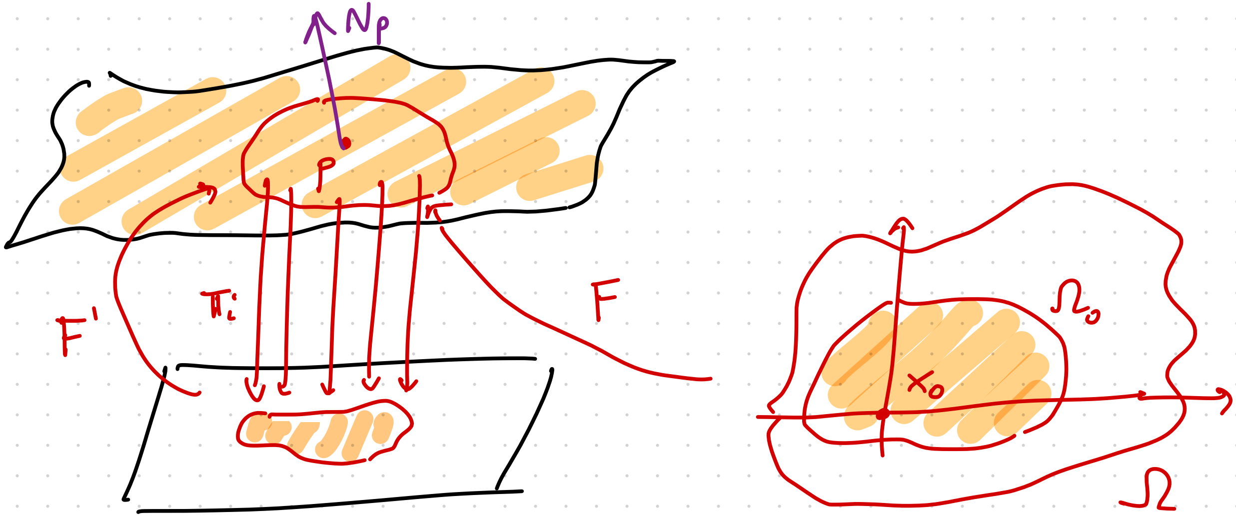
<u>Rmq</u> On a

$$\pi_i \circ dF \text{ est injective en } p \iff \pi_i|_{T_pS} : T_pS \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ est injective}$$

$$\iff E_i \notin T_pS \iff \langle E_i, N_p \rangle \neq 0$$

$\operatorname{Ker} \pi_i = \operatorname{Vect}(E_i)$

i) $\Rightarrow$ ii)



Soit i tel que $\langle N_p, E_i \rangle \neq 0$.

Alors $d(\pi_i \circ F)_{x_0} = \pi_i \circ dF_{x_0}$ est injectif $\Rightarrow$ inversible

$\longrightarrow$ $\exists\, \Omega_0 \subset \Omega$ tel que $\pi_i \circ F|_{\Omega_0}$ est un difféo sur son image

Thm de la fonction inverse

$\Rightarrow$ $S \cap U'$ est l'image de $F' = (\pi_i|_{S\cap U'})^{-1}$

et donc un graphe sur $\pi_i(S \cap U')$.

Rmq L'argument de i) $\Rightarrow$ ii) montre aussi:

Si $F: \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, est différentiable et dF_{x_0} est injective, alors $\exists\, \Omega_0 \subset \Omega$, $x_0 \in \Omega_0$, tel que $F|_{\Omega_0}$ est injective.

Une immersion est localement injective, mais en général pas globalement.

iii) $\Rightarrow$ ii) Soit $S \cap U = \{ x \mid G(x) = 0 \}$ avec $dG_p \neq 0$.

Soit i tel que $dG_p(E_i) \neq 0$.

Donc

$$dG_p = \Big(\frac{\partial G}{\partial x_1}(p), \ldots, \underbrace{\frac{\partial G}{\partial x_i}(p)}_{\neq 0}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_{n+1}}(p) \Big)$$

$$\Longrightarrow S \cap U' = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \ldots, x_{i-1}, f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}), x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) \\ \text{pour } (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) \in \Omega' \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

Thm de la fonction implicite

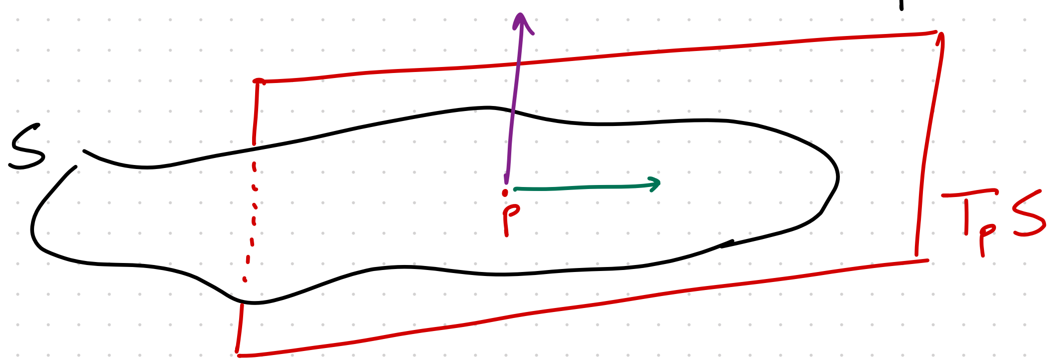
Champs vecteurs

Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une hypersurface, $S' \subset S$ ouvert.

- Un champ vecteur sur S' est une fonction continue

$$V : S' \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

- V est tangent à S si $V(p) \in T_pS$ $\forall p \in S'$.
- V est normal à S si $0 \neq V(p) \in T_pS^\perp$ $\forall p \in S'$.



Soit $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une carte locale pour S.

Tout champ vecteur tangent sur $F(\Omega)$ s'écrit comme

$$V(p) = dF(a_1 E_1 + \dots + a_n E_n)$$

On peut construire un champ vecteurs normal unitaire

$$N : F(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

où $N(p) = N_p$ est l'unique vecteur avec $\langle N_p, N_p \rangle = 1$, $N_p \in T_p S^{\perp}$, tel que $(\underbrace{dF_{x_0}(E_1), \dots, dF_{x_0}(E_n)}_{\in T_p S}, N_p)$ est une base <u>positive</u>.

En fait, pour trouver N, il suffit de prendre un vecteur $V_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $(dF(E_1), \ldots, dF(E_n), V_0)$ est une base positive en p (et donc en tout un voisinage de p).

On définit alors

$$N_{F(x)} := \frac{V_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle V_0, dF_x(E_i)\rangle}{\langle dF_x(E_i), dF_x(E_i)\rangle} dF_x(E_i)}{\left\| V_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle V_0, dF_x(E_i)\rangle}{\langle dF_x(E_i), dF_x(E_i)\rangle} dF_x(E_i) \right\|}$$

qui est une fonction continue de $x \in \Omega$.

Espace tangent et champ normal pour les graphes :

Si $S \cap V = \text{graph}(f : \Omega \to \mathbb{R})$, on avait construit
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$$

quitte à une permutation des coordonnées

donc

$$dF = \left(\begin{array}{c|c} I_n & \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{matrix} \end{array} \right)$$

$$T_{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))} S = \mathrm{Im}(dF) = \mathrm{Vect}\left(\left(1, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}\right), \dots, \left(0, \dots, 1, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \right)$$

$$N_{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))} = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right)}{\left\| \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right) \right\|}$$

Espace tangent et champ normal pour les ensembles de zéros

Si $S \cap U = \{p \mid G(p) = 0\}$, on a

$$T_p S = \operatorname{Ker} dG_p$$

En fait, si $\gamma(t) \subset S$, $G(\gamma(t)) \equiv 0$, donc $dG_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0)) = 0$.

<u>Exo</u> Retrouver cette formule par le cas précédent et le théorème de la fonction implicite.

Alors

$$N_p S = \pm \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}(p)\right)}{\left\|\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}(p)\right)\right\|}$$

parce que, pour tout $v \in \operatorname{Ker} dG_p$, $\langle N_p S, v \rangle = 0$.

<u>Exemple</u> $\mathbb{S}^2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid G(x) = 0 \}$

pour $G(x) = \langle x, x \rangle - 1.$

Donc $T_x \mathbb{S}^2 = \operatorname{Ker} dG_x = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, v \rangle = 0 \} = x^\perp$

$N_x \mathbb{S}^2 = \pm x$