3. Définitions de surface

<u>But</u> : Montrer l'équivalence entre 3 définitions de surface ;

i) Une surface est localement l'image d'une paramétrisation

comme pour les courbes

ii) Une surface est localement un graphe par rapport à l'un des trois axes de $\mathbb{R}^3$

iii) Une surface est localement représentée comme l'ensemble des zéros d'une fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Rappel de calcul différentiel

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, Ω ouvert, $x_0 \in \Omega$

- la dérivée directionnelle de f dans la direction de $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, est la limite (si elle existe) :

$$\partial_v f(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

en particulier, pour $v = E_i$, $i = 1, \dots, n$,

$\partial_v f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ est la dérivée partielle

Rmq $\partial_{\lambda v} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda v) - f(x_0)}{t} =$ $s := t\lambda$

$\lambda \neq 0$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + sv) - f(x_0)}{s} \cdot \lambda = \lambda \, \partial_v f(x_0)$$

- f est différentiable au sens de Gâteaux en p si, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, $\partial_v f(x_0)$ existe.

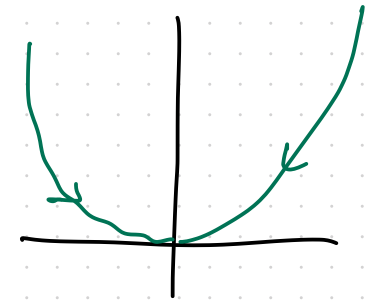
Rmq Il existe des fonctions différentiables au sens de Gâteaux qui ne sont pas continues !

Par exemple, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{(x^4+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad x_0 = (0,0)$

Pour $v = (u,w)$, $\dfrac{f(tu,tw)}{t} = \dfrac{1}{t} \cdot \dfrac{t^6u^4w^2}{t^4(t^2u^4+w^2)^2} = \dfrac{tu^4w^2}{(t^2u^4+w^2)^2}$

- si $w = 0$, $\dfrac{f(tu,tw)}{t} = 0$ donc $\partial_v f = 0$
- sinon, $\dfrac{u^4w^2}{(t^2u^4+w^2)^2} \longrightarrow \dfrac{u^4}{w^2}$ donc $\partial_v f = 0$

Mais $\lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{t^8}{(2t^4)^2} = \frac{1}{4} \neq 0$



Une notion plus forte de différentiabilité consiste à demander que l'application $v \longmapsto \partial_v f$, qui est homogène, soit aussi linéaire

- f est différentiable au sens de Fréchet en $p \in \Omega$ s'il existe une application linéaire $\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + r(x)$

avec $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{\|x - x_0\|} = 0$

Alors ℓ est la différentielle de f en x_0, qu'on denote $\ell = df_{x_0}$

<u>Rmq</u> si f est différentiable en x_0, alors

- f est continue en x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- $$\partial_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\ell(tv) + r(x_0 + tv)}{\underset{\| \frac{\|(x_0+tv) - x_0\|}{\|v\|}}{t}} = \lim_{t \to 0} \frac{t\ell(v)}{t} = \ell(v)$$

Donc, si $v = (v_1, \dots, v_n)$,

$$\partial_v f(x_0) = df_{x_0}(v) = df_{x_0}(v_1 E_1 + \dots + v_n E_n)$$
$$= v_1 df_{x_0}(E_1) + \dots + v_n df_{x_0}(E_n) = v_1 \partial_{x_1} f(x_0) + \dots + v_n \partial_{x_n} f(x_0).$$

Une fonction $F = (F_1, \dots, F_m) : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\Omega}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable

en x_0 si toute F_i est différentiable en x_0.

On appelle $dF_{x_0} = ((dF_1)_{x_0}, \dots, (dF_m)_{x_0}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la

différentielle de F en x_0.

<u>Théorème de la fonction inverse</u>

Soit $F : \Omega^{\subset \mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable, soit $x_0 \in \Omega$.

Si $dF_{x_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est inversible, alors il existe des

voisinages ouverts U de x_0 et V de $F(x_0)$ tels que

$F|_U$ est un difféomorphisme de U à V.

Théorème de la fonction implicite

Soit $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable, soit $(\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\Downarrow}{x_0}}, \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\Downarrow}{y_0}}) \in \Omega$.

Si

$$dF_{x_0} = \left(\begin{array}{c|ccc} * & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(x_0) \\ & \vdots & & \vdots \\ & \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x_0) \end{array} \right)$$

$$\underbrace{}_{\text{"}\frac{\partial F}{\partial y}(x_0)\text{"}} \quad \underline{\text{inversible}}$$

alors il existe des voisinages ouverts U de (x_0, y_0), V de x_0, et une fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ telle que

$f(x_0) = y_0$ et, pour $(x,y) \in V$, $F(x,y) = 0 \iff y = f(x)$, $x \in V$

De plus,

$$F(x, f(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\text{inversible}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Définitions équivalentes de hypersurface dans $\mathbb{R}^{n+1}$

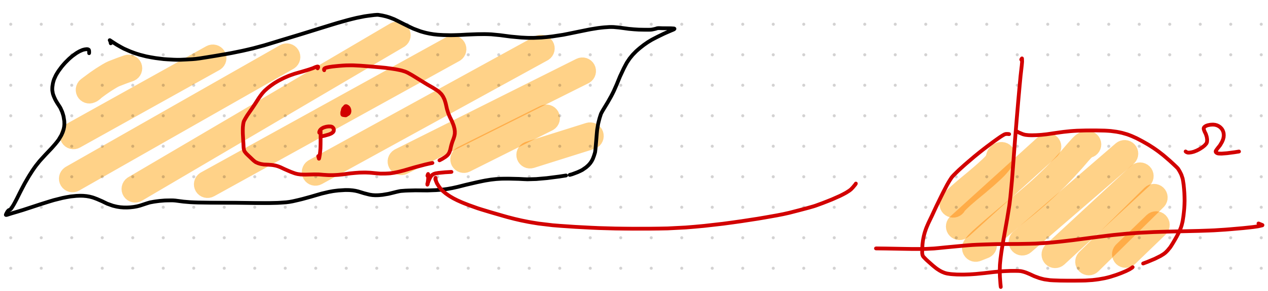
Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un sous-ensemble.

i) $\forall p \in S \quad \exists U$ voisinage de p dans $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$S \cap U = dF(\Omega) \quad \text{pour} \quad F : \underset{\mathbb{R}^n}{\Omega \subset} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

"carte locale"

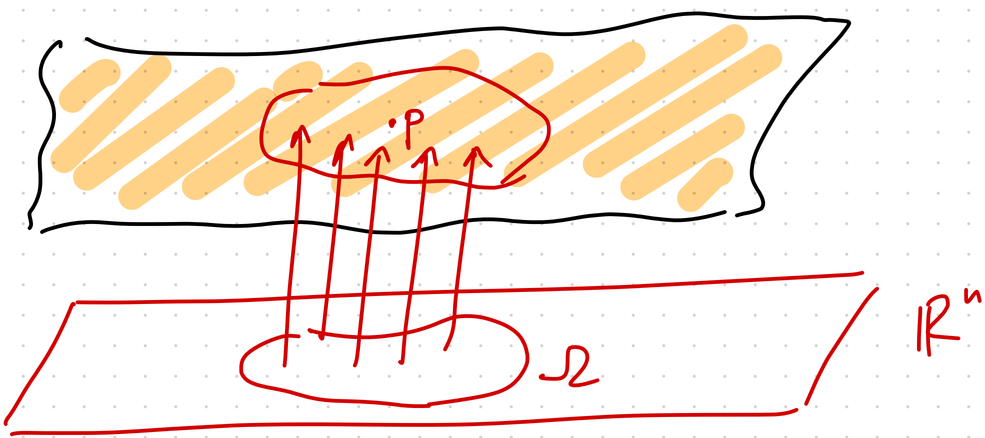
différentiable, avec F injective et $\underbrace{dF \text{ injective}}_{F \text{ est une immersion}}$



ii) $\forall p \in S \quad \exists U$ voisinage de p dans $\mathbb{R}^{n+1}$, $\exists i \in \{1, \dots, n+1\}$

et $f : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\Omega}} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable tels que

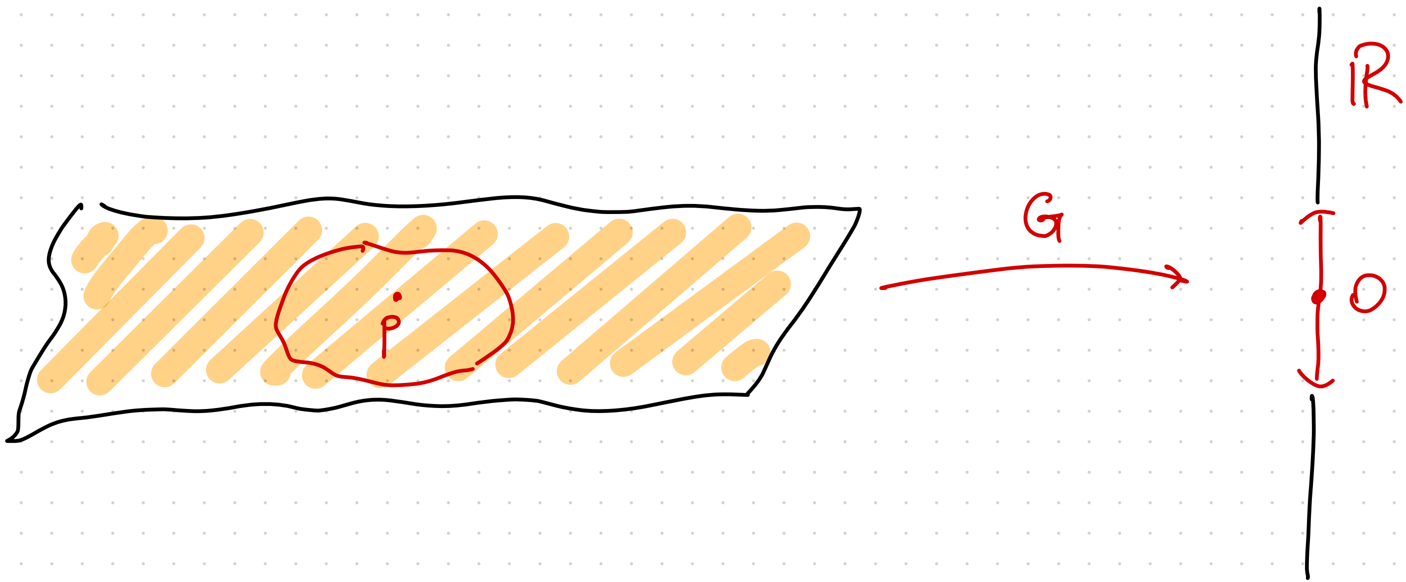
$$S \cap U = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ \text{pour } (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \in \Omega \end{array} \right\}$$



iii) $\forall p \in S \quad \exists U$ voisinage de p dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et

$G : U \to \mathbb{R}$, différentiable, $dG(x) \neq 0 \ \forall x \in U$,

tel que : $S \cap U = \{ x \in U \mid G(x) = 0 \}$



<u>Exemple</u> : la sphère $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

iii) $\mathbb{S}^2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{G(x,y,z)} = 1 \}$

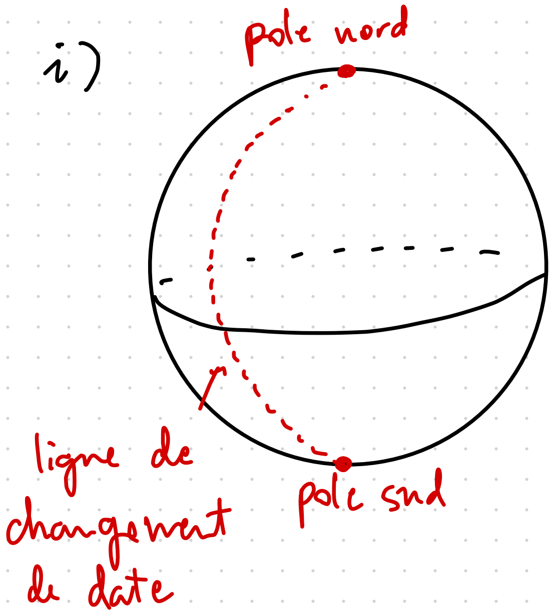
$$dG(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \neq 0$$

si $(x,y,z) \in \mathbb{S}^2$

$\Downarrow$

$(x,y,z) \neq (0,0,0)$

i)

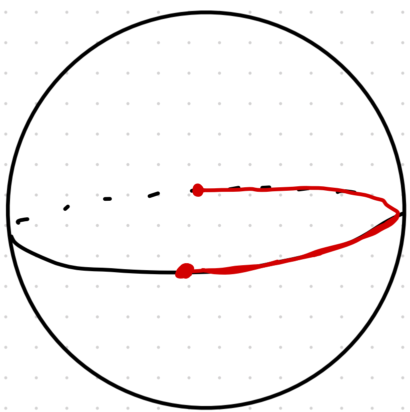


On peut construire 2 <u>cartes</u>

longitude latitude

- $F(\theta, \varphi) = (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$

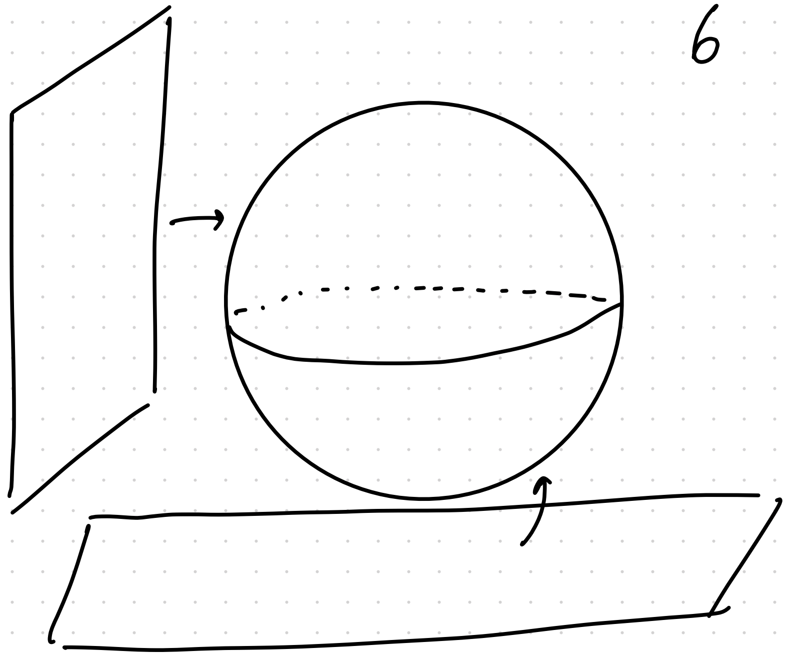
pour $(\theta, \varphi) \in \Omega := (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



- $F'(\theta', \varphi') = (\cos\varphi'\cos\theta', -\sin\varphi', \sin\varphi'\sin\theta')$

pour $(\theta', \varphi') \in \Omega$

iii)



$\mathbb{S}^2$ est la réunion de 6 hemisphères :

$$\mathbb{S}^2 = \{x>0\} \cup \{x<0\} \cup \{y>0\} \cup \{y<0\} \cup \{z>0\} \cup \{y<0\}$$

et chacun est representé comme un graphe

e.g. $\mathbb{S}^2 \cap \{z>0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \mid z = \sqrt{1-x^2-y^2}\}$