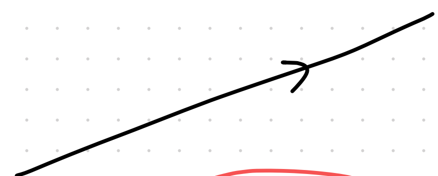
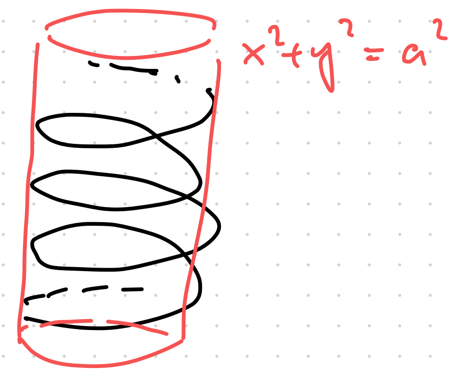
1. Courbes dans $\mathbb{R}^3$

Def Une courbe (paramétrée) de classe C^k est une fonction C^k
$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $I = (a,b)$.
La courbe est régulière si $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Ex $\gamma(t) = p_0 + t v_0$



Ex $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$



Rmq Deux courbes peuvent avoir la même image

e.g. $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $\gamma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$

On dit que γ_2 est un reparametrisation de γ_1 s'il existe $f : I_2 \xrightarrow{\text{diffeo}} I_1$ tel que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ f$

Rappel : $f : I \longrightarrow I'$ est un diffeo $\Leftrightarrow$ f est dérivable, bijectif et $f'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

Exo Cela définit une rélation d'équivalence sur l'ensemble des courbes paramétrées

La vitesse d'une courbe γ est la fonction $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$v(t) = \|\gamma'(t)\|$$

La longueur d'arc d'une courbe γ est la fonction

$$\ell(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\, du \qquad (I = (t_0, t_1))$$

Lemme Pour toute courbe regulière γ, il existe une reparametrisation $\hat{\gamma}$ telle que $\hat{v} \equiv 1$.

Rmq Dans la conclusion du Lemme, on a

$$\ell(t) = \int_{t_0}^{t} 1 \cdot du = t - t_0$$

on dit donc que γ est paramétrée par longueur d'arc

Preuve du Lemme: on cherche $f:(\hat{a},\hat{b}) \longrightarrow (a,b)$ telle que

$$\left\| \frac{d}{ds}\gamma(f(s)) \right\| = 1$$

Soit $g = f^{-1}$. Alors

$$1 = \left\| \frac{d}{ds}\gamma \circ g^{-1}(s) \right\| = \left\| \gamma'(g^{-1}(s)) \right\| \cdot \overbrace{\left| (g^{-1})'(s) \right|}^{= \frac{1}{g'(g^{-1}(s))}}$$

donc, pour $t = g^{-1}(s)$, on cherche g t.q. $g'(t) = \|\gamma'(t)\|$

il suffit donc de poser $g(t) = \int_{t_0}^{t} g'(u)\,du = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\,du$

Rmq Par la preuve, la reparamétrisation par longueur d'arc est unique quitte à changer t par $\pm t - c$

changement d'orientation

Le but de cette théorie est de comprendre des invariants qui décrivent la géométrie d'une courbe dans $\mathbb{R}^3$

quantités preservées par les isométries de $\mathbb{R}^3$

Plus précisement, si $\gamma_2 = F \circ \gamma_1$ et $F \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$, alors on doit obtenir la même quantité à partir de γ_1 et γ_2.

Rappel : Les isométries de $\mathbb{R}^3$ sont de la forme

$$F(x) = Ax + v$$

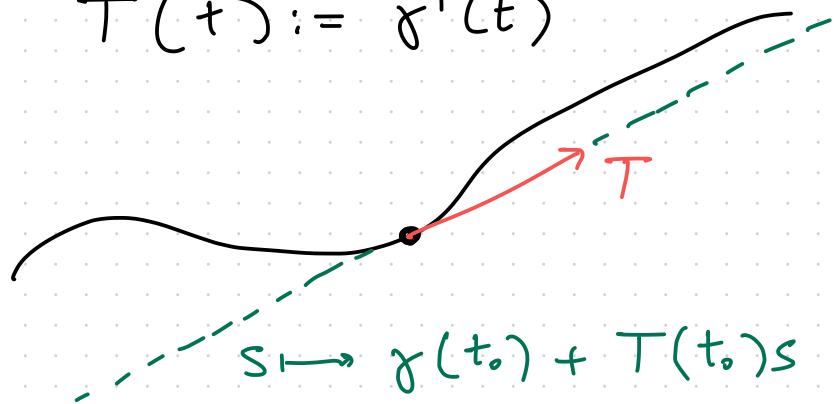
$\det(A)^2 = 1$
$\Rightarrow \det A = \pm 1$

pour $A \in O(3) = \{ A \in M(2\times 2, \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathrm{id} \}$.

F préserve l'orientation $\Longleftrightarrow A \in SO(3) = \{ A \in O(3) \mid \det A = 1 \}$.

Étant donnée une courbe regulière $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, paramétrée par longueur d'arc, on définit :

- le vecteur tangent $T(t) := \gamma'(t)$



$s \longmapsto \gamma(t_0) + T(t_0)s$ est la droite tangente en t_0.

e.g. $\gamma(t) = \gamma(t_0) + T(t_0)(t - t_0) + O((t-t_0)^2)$ par Taylor

- la courbure $k(t) := \| \gamma''(t) \|$

Rmq $k \equiv 0 \iff \gamma(t) = p + tv$ $\qquad \underbrace{\gamma_1''(t)^2 + \gamma_2''(t)^2 + \gamma_3''(t)}_{\| \gamma''(t) \|^2} = 0$

En fait, si $k \equiv 0$, alors $\| \gamma''(t) \|^2 = 0$

Donc $\gamma_i''(t) = 0 \quad \forall t \quad \forall i = 1, 2, 3$

$\Rightarrow \gamma_i(t) = p_i + t v_i$

$$\Rightarrow \gamma(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}}_{= p} + t \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{= v}$$

La réciproque est évidente aussi.

Exo La courbure est invariante par isométries :
si $\gamma_2 = F \circ \gamma_1$, $F(x) = Ax + b$, $A \in O(3)$, alors $k_1 \equiv k_2$.

On continue avec les définitions:

- γ est biregulière si $k(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$
- pour γ biregulière, le vecteur normal $N(t) := \dfrac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}$

Rmq : N est normal à T :

$$\underbrace{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}_{\langle T(t), T(t) \rangle} = 1 \implies \underbrace{2 \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}_{2\langle T(t), k(t) N(t) \rangle} = 0$$

$$\implies \langle T(t), N(t) \rangle = 0$$

Exo Règle de Leibnitz

$$\frac{d}{dt} \langle A(t), B(t) \rangle = \langle \frac{d}{dt} A(t), B(t) \rangle + \langle A(t), \frac{d}{dt} B(t) \rangle$$

- le vecteur binormal $B(t) := T(t) \boxtimes N(t)$.

Rappel sur le produit vecteur

Pour $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $X \boxtimes Y$ est l'unique vecteur dans $\mathbb{R}^3$ t.q.

$$\langle X \boxtimes Y, Z \rangle = \det(X, Y, Z) \qquad \forall Z \in \mathbb{R}^3$$

En fait, ça existe parce que, pour $Z = E_i$,

$$\langle X \boxtimes Y, E_i \rangle = \det(X, Y, E_i) \implies X \boxtimes Y = \sum_{i=1}^{3} \det(X, Y, E_i) E_i$$

Réciproquement, par cette formule on a,

pour $Z = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j E_j$,

$$\langle X \boxtimes Y, Z \rangle = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \det(X, Y, E_i) \underbrace{\langle E_i, E_j \rangle}_{= \delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{3} \det(X, Y, \lambda_i E_i)$$

$$= \det(X, Y, Z).$$

Cela permet de vérifier la "règle magique"

$$X \boxtimes Y = \text{"} \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & E_1 \\ x_2 & y_2 & E_2 \\ x_3 & y_3 & E_3 \end{pmatrix} \text{"}$$

$$= \underbrace{\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} E_3}_{} - \underbrace{\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} E_2}_{} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} E_1}_{}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \qquad = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det (X, Y, E_3) \qquad = \det (X, Y, E_2) \qquad = \det (X, Y, E_1)$$

$\underline{\text{Ex}}$ $\langle E_1, E_2 \rangle = E_3$ $\underline{\text{Ex}}$ $\langle E_1, \cos\theta E_1 + \sin\theta E_2 \rangle = \sin\theta\, E_3$

Mais si $A \in O(3)$

$\det(MN) = \det M \cdot \det N$

- si $\det A = 1$, $(AX) \boxtimes (AY) = A(X \boxtimes Y)$

puisque $\langle A(X \boxtimes Y), A(Z) \rangle = \langle X \boxtimes Y, Z \rangle$

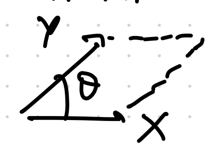
$= \det(X, Y, Z) = \det(AX, AY, AZ)$

- si $\det A = -1$, $(AX) \boxtimes (AY) = -A(X \boxtimes Y)$

$\underline{\text{donc}}$;

- si X et Y sont linéairement indépendants,

$X \wedge Y$ est orthogonal au plan engendré par X et Y, $(X, Y, X \boxtimes Y)$ est une base orientée, et $\|X \boxtimes Y\| = \|X\| \|Y\| \sin\theta$

$=$ Aire ()

- sinon, $X \boxtimes Y = 0$

En conclusion, les vecteurs T, N, B forment un repère orthonormé

$$\begin{cases} \langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = 1 \\ \langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0 \end{cases}$$