Exercice 1 (Question de cours)

1. X est compact si tout recouvrement $\{U_i \mid i \in I\}$ de X par des ouverts U_i admet un sous-ensemble fini $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$ qui recouvre X.
2. Si $\{U_i \mid i \in I\}$ est un recouvrement de $f(X) \subset Y$ par ouverts, alors $\{f^{-1}(U_i) \mid i \in I\}$ est un recouvrement de X (en fait la réunion des $f^{-1}(U_i)$ est égale à X) et les $f^{-1}(U_i)$ sont ouverts par la continuité de f. Donc il existe un sous-ensemble fini $\{i_1, \ldots, i_n\}$ de I tel que $\{f^{-1}(U_{i_1}), \ldots, f^{-1}(U_{i_n})\}$ recouvre X. Donc $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$ recouvre $f(X)$.

Exercice 2 (Compactifie d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$)

1. On a $\emptyset \in \mathcal{T}_\infty$ car l'ensemble vide est ouvert pour $\mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}_\infty$ car le complementaire de X est vide et donc compact dans $\mathbb{R}^n$. Si U_1 et U_2 sont ouverts, alors il y a trois possibilités : si $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$, leur intersection est aussi ouverte dans $\mathbb{R}^n$; ceci est vrai aussi si $\infty \in U_1$ avec $\mathbb{R}^n \setminus U_1$ compact (donc fermé) et $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ ouvert de $\mathcal{T}$ car $U_1 \cap \mathbb{R}^n$ est ouvert en tant que complementaire d'un fermé ; finalement si $\infty \in U_1, U_2$ alors $\mathbb{R}^n \setminus (U_1 \cap U_2) = (\mathbb{R}^n \setminus U_1) \cup (\mathbb{R}^n \setminus U_2)$ est compact et donc dans tout cas $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_\infty$. Pour montrer que $\mathcal{T}_\infty$ est stable par réunions arbitraire : une réunion arbitraire d'ouverts de la forme $U_i \subset \mathbb{R}^n$ est encore ouverte ; une réunion arbitraire de U_i avec $\infty \in U_i$ et $\mathbb{R}^n \setminus U_i$ compact est encore de cette forme car elle contient ∞ et son complementaire est une intersection de fermées bornées dans $\mathbb{R}^n$ donc encore fermée et bornée ; pour conclure il suffit de considerer la réunion d'un ouvert U_1 du premier type et un ouvert U_2 du second type. Dans ce dernier cas, $U_1 \cup U_2$ contient ∞ et son complementaire est égale à $(\mathbb{R}^n \setminus U_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U_2)$, donc compact.
2. Tout $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert pour $\mathcal{T}$ est aussi ouvert pour $\mathcal{T}_\infty$ par définition. Vice versa, si $U = \mathbb{R}^n \cap V$ est ouvert pour la topologie induite, avec V ouvert pour $\mathcal{T}_\infty$, alors soit $V \subset \mathbb{R}^n$ et alors $U = V$ est un ouvert de $\mathcal{T}$, soit $\infty \in V$ et $\mathbb{R}^n \setminus V$ est compact, donc fermé, et donc U est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ en tant que complementaire d'un fermé.
3. Soient $x, y \in X$. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors ils sont séparés par des ouverts de $\mathbb{R}^n$, si disons $x \in \mathbb{R}^n$ et $y = \infty$, alors ils sont séparés par une boule ouverte $B(x,1)$ centrée en x et par $V = \{\infty\} \cup \overline{B(x,2)}$.
4. Si $\infty \in U_{i_0}$, alors les autres ouverts U_i, avec $i \neq i_0$ recouvrent le complementaire de U_{i_0} et les $U_i \cap \mathbb{R}^n$ sont ouverts dans $\mathbb{R}^n$ par le point 2.
5. Si $\{U_i \mid i \in I\}$ est un recouvrement ouvert de X, alors il existe i_0 tel que $\infty \in U_{i_0}$. Donc par le point précedent, $\{U_i \cap \mathbb{R}^n \mid i \neq i_0\}$ est un recouvrement de $\mathbb{R}^n \setminus U_{i_0}$, qui est compact par définition de $\mathcal{T}_\infty$, par ouverts de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors un sous-recouvrement fini $\{U_{i_1} \cap \mathbb{R}^n, \ldots, U_{i_n} \cap \mathbb{R}^n\}$ de $\mathbb{R}^n \setminus U_{i_0}$. En conclusion $\{U_{i_0}, \ldots, U_{i_n}\}$ recouvre X.
6. Comme par hypothèse la topologie induite sur $\mathbb{R}^n$ est $\mathcal{T}$, pour $U \subset \mathbb{R}^n$ on a $U = U \cap \mathbb{R}^n$ et donc U et ouvert pour $\mathcal{T}'$ si et seulement s'il est pour $\mathcal{T}$.
7. Si une famille $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ est donnée et on fixe i_0, la condition que $\mathcal{U}$ recouvre X est équivalente à ce que les U_i, $i \neq i_0$ recouvrent le complementaire de U_{i_0}.
8. Si $\infty \in U$ et U est ouvert, soit $\{U_i \mid i \in I\}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ (pour la topologie induite ou pour $\mathcal{T}$, c'est équivalent) qui recouvre $\mathbb{R}^n \setminus U$. Par le point 7, $\{U\} \cup \{U_i \mid i \in I\}$ recouvre X et donc par hypothèse il existe un sous-recouvrement fini $\{U, U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$. Ça montre que $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$ recouvre $\mathbb{R}^n \setminus U$ qui est donc compacte. Vice versa, si $\mathbb{R}^n \setminus U$ est compacte, alors il est un fermé de $\mathbb{R}^n$ pour la topologie $\mathcal{T}$ et donc aussi pour $\mathcal{T}'$, et donc son complementaire U est ouvert.
9. Par les points précedents, un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert pour $\mathcal{T}'$ si et seulement s'il est ouvert pour $\mathcal{T}$, si et seulement s'il est ouvert pour $\mathcal{T}_\infty$. Si par contre $\infty \in U$, U est ouvert pour $\mathcal{T}'$ si et seulement si $\mathbb{R}^n \setminus U$ est compact, ce qui est équivalent à ce que U est ouvert pour $\mathcal{T}_\infty$ par définition.
10. On peut donner un bijection $f : S^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ qui est un homéomorphisme entre $S^1 \setminus f^{-1}(\infty)$ et $\mathbb{R}^n$. Donc la topologie $\mathcal{T}'$ induite sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par la topologie de S^1 et la bijection f a la propriété que $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \mathcal{T}')$ est compacte et la topologie induite sur $\mathbb{R}$ coïncide avec celle de $\mathbb{R}$. Donc par l'unicité ci-dessus, $\mathcal{T}'$ coïncide avec $\mathcal{T}_\infty$. Comme f est un homéomorphisme entre S^1 et $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \mathcal{T}')$ par construction, S^1 est homéomorphe à $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \mathcal{T}_\infty)$.
11. Le compactifié de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à S^n pour le même argument.

Exercice 3 (Compact de Banach-Mazur)

1. Soit $x \neq 0$. Si $L(x) = 0$, on a $M \circ L(x) = 0$ et donc $\|M \circ L(x)\|_Z = 0$. Sinon,

$$\frac{\|M \circ L(x)\|_Z}{\|x\|_X} = \frac{\|M \circ L(x)\|_Z}{\|L(x)\|_Y} \cdot \frac{\|L(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \left(\sup_{y \neq 0} \frac{\|M(y)\|_Z}{\|y\|_Y}\right) \cdot \left(\sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_Y}{\|x\|_X}\right) = |||M||| \circ |||L|||$$

donc

$$|||M \circ L||| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|M \circ L(x)\|_Z}{\|x\|_X} \leq |||M||| \circ |||L||| \; .$$

2. $|||\mathrm{id}||| = |||L \circ L^{-1}||| \leq |||L||| \cdot |||L^{-1}|||$ par le point 1 et $|||\mathrm{id}||| = 1$ en appliquant la définition, donc $|||L||| \cdot |||L^{-1}||| \geq 1$ et $\log(|||L||| \cdot |||L^{-1}|||) \geq 0$, ce qui implique $\delta(X, Y) \geq 0$.

3. Si $L : X \to Y$ est un isomorphisme isométrique, alors $\|L(x)\|_Y = \|x\|_X$ pour tout $x \in X$, donc $|||L||| = \sup_{x \neq 0} \|L(x)\|_Y / \|x\|_X = 1$. Analoguement $|||L^{-1}||| = 1$ et alors $|||L||| \cdot |||L^{-1}||| = 1$. Du coup $\delta(X, Y) \leq 0$ et $\delta(X, Y) = 0$ par le point 2.

4. Si $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ est isomorphisme, alors $L^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ est isomorphisme aussi. Donc pour tout élément dans l'ensemble $\{\log(|||L||| \cdot |||L^{-1}|||) \, : \, L \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ isomorphisme}\}$ dont $\delta(X, Y)$ est la borne inférieure, il existe un élément dans l'ensemble $\{\log(|||L||| \cdot |||L^{-1}|||) \, : \, L \in \mathcal{L}(Y, X) \text{ isomorphisme}\}$ avec la même valeur. Cela montre que $\delta(X, Y)$ et $\delta(Y, X)$ sont la borne inférieure du même sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et donc ils coïncident.

5. Pour tout $L : X \to Y$ et $M : Y \to Z$, soit $N = M \circ L$. Par le point 1, $|||N||| \leq |||L||| \cdot |||M|||$ et analoguement $|||N^{-1}||| \leq |||L^{-1}||| \cdot |||M^{-1}|||$. En multipliant les deux inégalitées, $|||N||| \cdot |||N^{-1}||| \leq (|||L||| \cdot |||L^{-1}|||)(|||M||| \cdot |||M^{-1}|||)$. En prenant le logarithme, $\log(|||N||| \cdot |||N^{-1}|||) \leq \log(|||L||| \cdot |||L^{-1}|||) + \log(|||M||| \cdot |||M^{-1}|||)$. Donc par définition de borne inférieure, $\delta(X, Z) \leq \log(|||L||| \cdot |||L^{-1}|||) + \log(|||M||| \cdot |||M^{-1}|||)$ pour tour isomorphisme $L : X \to Y$ et $M : Y \to Z$. En prenant la borne inférieure sur les L et M, $\delta(X, Z) \leq \delta(X, Y) + \delta(Y, Z)$.

6. Si $L' = \lambda L$, alors $(L')^{-1} = \lambda^{-1} L^{-1}$, donc $|||L'||| \cdot |||(L')^{-1})||| = (|\lambda| |||L|||)(|\lambda|^{-1} |||L^{-1}|||) = |||L||| \cdot |||L^{-1}|||$.

7. Par le point précédent, il suffit de diviser L par $|||L|||$, de telle façon que (quitte à remplacer L par son multiple) $|||L||| = 1$, $|||L||| \cdot |||L^{-1}||| = 1$ et donc $|||L^{-1}||| = 1$ aussi.

8. Si $0 = \delta(X, Y) = \log(|||L||| \cdot |||L^{-1}|||)$, alors $|||L||| \cdot |||L^{-1}||| = 1$ et par les deux points précedents on trouve un isomorphisme $L : X \to Y$ (un multiple de L, mais qu'on denote encore par L) telle que $|||L||| = |||L^{-1}||| = 1$. Cela implique que pour tout $x \neq 0$ en X, $\|L(x)\|_Y \leq \|x\|_X$ parce que $|||L||| = 1$, mais d'autre côté $\|x\|_X = \|L^{-1}(L(x))\|_X \leq \|L(x)\|_Y$ parce que $|||L^{-1}||| = 1$. Donc $\|L(x)\|_Y = \|x\|_X$ pour tout x (pour $x = 0$ c'est trivial), c'est-à-dire L est isomorphisme isométrique.

9. Comme la suite $\log(|||L_n||| \cdot |||L_n^{-1}|||)$ converge, elle est bornée (disons par $C > 0$), donc $|||L_n||| \cdot |||L_n^{-1}||| \leq e^C$. En utilisant le point 6, si on remplace L_n par $L_n / |||L_n|||$ on n'affecte pas la quantité $|||L_n||| \cdot |||L_n^{-1}|||$, donc on obtient une nouvelle suite avec $|||L_n||| = 1$ et $|||L_n^{-1}||| \leq e^C$.

10. En étant $\mathcal{L}(X, Y)$ un espace vectoriel de dimension finie, et $||| \cdot |||$ une norme sur $\mathcal{L}(X, Y)$, les boules fermées sont compactes. Donc avec les conditions obtenues dans le point 9, la suite L_n est dans la boule unité de $\mathcal{L}(X, Y)$, et L_n^{-1} dans la boule de rayon e^C. On peut donc extraire des sous-suites convergentes par compacité des boules fermées.

11. Soit L_∞ la limite de la sous-suite convergente de L_n, et M_∞ la limite de la sous-suite de L_n^{-1}. Comme $L_n \circ L_n^{-1} = \mathrm{id}$, à la limite $L_\infty \circ M_\infty = \mathrm{id}$, c'est-à-dire $M_\infty = L_\infty^{-1}$. De plus, par continuité de la norme, $|||L_n||| \to |||L_\infty|||$ et $|||L_n||| \to |||L_\infty^{-1}|||$. Donc $\delta(X, Y) = \lim_n \log(|||L_n||| \cdot |||L_n^{-1}|||) = \log(|||L_\infty||| \cdot |||L_\infty^{-1}|||)$. Notamment, la borne inférieure qui définit $\delta(X, Y)$ est toujours atteinte. Par le point 8, si $\delta(X, Y) = 0$ alors X et Y sont isométriquement isomorphes, donc δ définit une distance sur le quotient.