Exercice 1 (Question de cours)

1. Un fonction $f\colon X \to Y$ entre deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est continue si et seulement si pour tout $O \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X$.
2. Supposons f continue et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ un suite convergeant vers $x \in X$. Soit V un ouvert de X' contenant $f(x)$. Comme f est continue, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X contenant x. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in V$. ainsi pour tout $n \geq N$, $f(x_n) \in f\left(f^{-1}(V)\right) = V$. Ce qui prouve que $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

   Reciproquement, soit V un ouvert de X' et soit $U = f^{-1}(V)$. Si U n'est pas un ouvert, il existe $x \in U$ tel que tout voisinage de x rencontre $X \setminus U$. En particulier, pour tout $n > 0$, $B(x, 1/n) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. On peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (X \setminus U)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x. Par hypothèse, on a alors $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in (X' \setminus V)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $f(x)$. Comme $X' \setminus V$ est fermé, $f(x) \in X' \setminus V$, ce qui est absurde vu que $x \in f^{-1}(V)$.

Exercice 2 (Sur la continuité)

1. Soit $f\colon X \to Y$. Comme X est muni de la topologie discrète, toute partie de X est un ouvert de X. En particulier, pour tout ouvert V de Y, $f^{-1}(V)$ est ouvert dans X et f est continue.
2. Soit $f\colon X \to Y$. comme $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, Y\}$, f est continue si et seulement si $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(Y) = X$ sont des ouverts de X. Ces derniers sont bien des ouverts par définition d'un topologie.
3. Soit $f\colon X \to Y$ une application continue. Comme Y est muni de la topologie discrète et X de la topologie grossière, on a en particulier que pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ ou $f^{-1}(\{y\}) = X$. Ainsi, en fixant $x_0 \in X$, on a $f^{-1}(\{f(x_0)\}) = X$ et f et pour tout $x \in X$, $f(x) = f(x_0)$. Réciproquement, si f est constant, pour tout ouvert O de Y, on a $f^{-1}(O) \in \{\emptyset, X\}$ et est donc un ouvert de X. Ainsi f est continue.
4. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ et soit $x \in X$. Le seul voisinage de x est X et il contient tout les terme de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant et soit l sa limite. $\{l\}$ est un voisinage de l , donc il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in \{y\}$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Reciproquement, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un rang p, alors pour tout voisinage V de x_p et tout $n \geq p$, $x_n = x_p \in V$. Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergeante.

Exercice 3 (Axiomes de fermeture de Kuratowski)

1. $\emptyset = X \setminus X$ est le plus petit fermé contenant X. Donc (a) est vérifiée.

   Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, $\alpha(A)$ est le plus petit fermé contenant A donc il contient A et (b) est vérifiée.

   Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, $\alpha(A)$ est fermé donc $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et (c) est vérifiée.

   Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $\alpha(A) \cup \alpha(A)$ est un fermé contenant $A \cup B$ donc $\alpha(A \cup B) \subseteq \alpha(A) \cup \alpha(B)$. De plus $\alpha(A \cup B)$ est un fermé qui contient A, respectivement B, il contient donc $\alpha(A)$, respectivement $\alpha(B)$. Ainsi $\alpha(A \cup B) \supseteq \alpha(A) \cup \alpha(B)$. Ainsi $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$ et (d) est verifiée.
2. Par (a), $X = X \setminus \emptyset \in \mathcal{T}$. Par (b), $X = \alpha(X)$ et $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{T}$.

   Montrons que $\mathcal{T}$ est stable par unions quelconques : Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'élément de $\mathcal{T}$ et soit $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Par (b), on a $X \setminus A \subseteq \alpha(X \setminus A)$. Pour l'inclusion inverse, on remarque tout d'abord que pour tout $C \subset D \subseteq X$, $\alpha(C) \subseteq \alpha(C) \cup \alpha(D) = \alpha(C \cup D) = \alpha(D)$ (i.e. α est croissante). Ainsi, comme pour tout $j \in I$, $X \setminus A \subseteq X \setminus A_j$ et donc $\alpha(X \setminus A) \subseteq \alpha(X \setminus A_j) = X \setminus A_j$. donc $\alpha(X \setminus A) \subseteq \bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i)$.

   Montrons la stabilité par intersections finis : Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$. On a, en utilisant (d), $\alpha\left(X \setminus (A_1 \cap A_2)\right) = \alpha\left((X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)\right) = \alpha(X \setminus A_1) \cup \alpha(X \setminus A_2) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)$.

   Montrons que α est l'application d'adhérence pour la topologie $\mathcal{T}$: Pour cela on remarque tout d'abord que les fermés de X pour cette topologie sont exactement les $A \in \mathcal{P}(X)$ tels que $\alpha(A) = A$. Soit donc $A \in \mathcal{P}(X)$, comme, par (d), $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$, $\alpha(A)$ est fermé et donc $\overline{A} \subseteq \alpha(A)$. Enfin, si F est un fermé contenant A, comme α est croissante, $\alpha(A) \subseteq \alpha(F) = F$. Ainsi, $\alpha(A) \subseteq \overline{A}$.

   Montrons que $\mathcal{T}$ est l'unique topologie sur X dont α est l'application d'adhérence : Soit alors $\mathcal{T}'$ un topologie sur X dont α est l'application d'adhérence. Pour $A \in \mathcal{P}(X)$, on a :

   $$A \in \mathcal{T}' \Leftrightarrow X \setminus A \text{ fermé dans } (X, \mathcal{T}') \Leftrightarrow \alpha(X \setminus A) = X \setminus A \Leftrightarrow A \in \mathcal{T}.$$

   Ainsi, $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

Exercice 4 (Un espace séparable sans bases dénombrables)

1. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des unions quelconques d'éléments de $\mathcal{B}$. $\emptyset \in \mathcal{T}$ comme union vide d'élément de $\mathcal{B}$. De plus, $H = \bigcup_{(x,y)\in H} B_0((x,y), y/2)\mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ est stable par union par construction et, pour la stabilité par intersections finies, il suffit de vérifier que toute intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est dans $\mathcal{T}$. Cependant, l'intersection de deux éléments distincts de $\mathcal{B}$ est soit vide, soit l'intersection de deux boules pour la topologie usuelle, soit un élément de $\mathcal{B}$ de la forme $B_0((x,y), y) \cup \{(x,0)\}$. Ce dernière cas est vérifié si les deux éléments de $\mathcal{B}$ sont du type $B = B_0((x,y_1), y_1) \cup \{(x,0)\}$ et $B' = B_0((x,y_2), y_2) \cup \{(x,0)\}$, et alors l'intersection sera $B_0((x,y), y) \cup \{(x,0)\}$ avec $y = \min\{y_1, y_2\}$. C'est donc soit un ouvert pour la topologie usuelle soit un élément de $\mathcal{B}$ du deuxième type et donc dans $\mathcal{T}$.
2. Soit $A = H \cap \mathbb{Q}^2$. A est dénombrable et, pour tout $(x,y) \in H$ avec $y > 0$ et tout $r \in]0, y]$, $B_0((x,y), r)$ contient un élément de A car A est dense dans H pour la topologie usuelle. Ainsi, A est dense dans H pour la topologie $\mathcal{T}$.
3. Soit $D = \{(x,0) \colon x \in \mathbb{R}\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{(x,0)\} = (B_0((x,1),1) \cup \{(x,0)\}) \cap D$ est l'intersection d'un ouvert de H avec D. Ainsi tout les singleton de D sont ouvert et la topologie induite sur D est la topologie discrète.
4. Soit $\mathcal{B}$ un base dénombrable d'ouvert pour X. Alors $\{B \cap Y \colon B \in \mathcal{B}\}$ est une base dénombrable d'ouvert pour la topologie induite sur Y.
5. Comme la topologie induite sur D est la topologie discrète et que D n'est pas dénombrable, D n'admet pas de base dénombrable d'ouvert pour la topologie induite. Par la question précédente, on en déduite que H n'admet pas de base dénombrable d'ouvert.
6. Un espace métrique séparable admet forcément une base dénombrable d'ouvert donné par, si A est une partie dénombrable dense, $\{B(a, 1/n) \colon n \in \mathbb{N}^*, a \in A\}$.

Exercice 5 (Topologie p-adique)

1. Par définition d'une ultramétrique, il ne reste qu'à vérifier l'inégalité triangulaire. Soit donc $x, y, z \in E$, on a bien $d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z)) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
2. Soit $z \in B(x,r)$, on a $d(y,z) \leq \max(d(y,x), d(x,z)) \leq r$ et donc $z \in B(y,r)$. De même, si $z \in B(y,r)$, on a $z \in B(x,r)$.
3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 0,\ \forall n \geq N,\ \forall p \geq 0, \quad d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon.$$
en particulier, pour $p = 1$, on obtient que $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ quand $N \to +\infty$. Réciproquement, supposons que $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ quand $N \to +\infty$ et soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, x_{n+1}) > \varepsilon$. On a alors, pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$, on a,en itérant l'inégalité ultramétrique(iii),
$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \max\left(d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2}), \ldots, d(x_{n+p-1}, x_{n+p})\right) < \varepsilon.$$
Ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
4. d est positive par construction. De plus, si n, m sont deux entiers distincts, $\nu_p(n-m) = \nu_p(m-n)$ ce qui donne la symétrie. Aussi, comme pour tout entier $n \neq 0$, $\|n\| > 0$, on a bien que pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$, $d(n,m) = 0$ si et seulement si $n = m$. Enfin, soit l, m, n trois entiers. Si deux d'entre eux sont égaux, l'inégalité ultramétrique est directe. Sinon, comme pour tout $k, r \geq 0$, si $p^k \mid m - l$ et $p^r \mid n - m$, alors $p^{\min(k,r)} \mid (m-l) + (n-m) = n - l$, on a bien l'inégalité ultramétrique.
5. on a $B_d(0,1) = \{n \in \mathbb{Z} : p \mid n\}$, $B_d(0, 1/p) = \{n \in \mathbb{Z} : p^2 \mid n\}$ et$B_d(1, 1/p) = \{n \in \mathbb{Z} : p^2 \mid n-1\}$.
6. Pour tout $n \geq 0$, $d(u_n, u_{n+1}) = \|p^{n+1}\| = p^{-n-1} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc, par la question 3, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
7. (a) On a pour tout $n \geq 0$, $(1 + (p-1)u_n) - (1 + (p-1)u) = (p-1)(u_n - u)$ et comme $p \not| p - 1$, on a $d(1 + (p-1)u_n, 1 + (p-1)u) = d(u_n, u)$. Ainsi, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u, $(1 + (p-1)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1 + (p-1)u$.
   (b) On a pour tout $n \geq 0$, $1 + (p-1)u_n = p^{n+1}$ et donc $(1 + (p-1)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi $1 + (p-1)u = 0$ c'est à dire $u = 1/(p-1) \notin \mathbb{Z}$ ce qui est absurde (sauf si $p = 2$ mais dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge...).
8. La question précédente exhibe une suite de Cauchy de $(\mathbb{Z}, d)$ non convergeante. Il n'est donc pas complet.