L3 Mathématiques
Parcours A 2019–2020

Contrôle Continu n°1

Durée : 1h45
Documents, téléphones et appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Question de cours)

1. Donner la définition d'une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 2 Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$I(x,y) = \begin{cases} [x,y] \text{ si } x \leq y \\ [y,x] \text{ si } y \leq x. \end{cases}$$

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On définit sur U la relation $\mathcal{R}$ par : pour tout $x, y \in U$, $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $I(x,y) \subseteq U$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ définie une relation d'équivalence sur U.

Pour $x \in U$ on note $C(x)$ la classe d'équivalence de x pour la relation $\mathcal{R}$.

2. Montrer que pour tout $x \in U$, $C(x)$ est un intervalle ouvert.
3. Montrer que le nombre de classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ est au plus dénombrable.
4. En déduire que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion (au plus) dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Exercice 3

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à coefficients entiers est dénombrable.
2. Montrer que l'ensemble

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{Z}[X], P(z) = 0\}$$

est dénombrable.

T.S.V.P.

Exercice 4 (Topologie et pré-ordre) Soit X un ensemble. Un **pré-ordre** sur X est une relation réflexive et transitive.

Topologie vers pré-ordre

1. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur X. On définit la relation $\leq_{\mathcal{T}}$ sur X par : pour tout $x, y \in X$, $y \leq_{\mathcal{T}} x$ si et seulement si tout ouvert contenant x contient aussi y.
   (a) Montrer que $\leq_{\mathcal{T}}$ est un pré-ordre sur X.
   (b) Déterminer la relation $\leq_{\mathcal{T}}$ pour $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ puis pour $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.
   (c) Déterminer la relation $\leq_{\mathcal{T}}$ pour $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie $\mathcal{T}$ engendrée par
   $$\{]-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Pré-ordre vers topologie

2. Soit $\leq$ un pré-ordre sur X. Pour tout $x \in X$, on définit
   $$V_{\leq}(x) = \{y \in X \mid y \leq x\}$$
   et on note $\mathcal{T}(\leq)$ l'ensemble des unions quelconques de parties du type $V_{\leq}(x)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{T}(\leq)$ est une topologie sur X.
   (b) Trouver un préordre $\leq$ sur X tel que $\mathcal{T}(\leq) = \{\emptyset, X\}$ puis tel que $\mathcal{T}(\leq) = \mathcal{P}(X)$.

Et vice et versa

3. (a) Montrer que $\leq_{\mathcal{T}(\leq)} = \leq$, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in X$, $x \leq_{\mathcal{T}(\leq)} y$ si et seulement si $x \leq y$.
   (b) Montrer que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(\leq_{\mathcal{T}})$.
   (c) Montrer que si X est fini alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\leq_{\mathcal{T}})$.
4. En déduire qu'il y a, sur un ensemble fini, autant de pré-ordres que de topologies.
5. Donner un exemple d'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ tel que $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}(\leq_{\mathcal{T}})$.